



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica Quântica de uma Partícula Neutra em
Campos Elétricos Externos**

Frankbelson dos Santos Azevedo

CAMPINA GRANDE

- Setembro 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Dinâmica Quântica de uma Partícula Neutra em
Campos Elétricos Externos**

Frankbelson dos Santos Azevedo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Diego Alejandro Cogollo Aponte.

Coorientador: Prof. Dr. Cleverson Filgueiras.

CAMPINA GRANDE

- Setembro 2015 -

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG

A994d Azevedo, Frankbelson dos Santos.
Dinâmica quântica de uma partícula neutra em campos elétricos externos / Frankbelson dos Santos Azevedo. – Campina Grande, 2015.
49 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Diego Alejandro Cogollo Aponte, Prof. Dr. Cleverson Filgueiras".

Referências.

1. Efeito Aharonov-Casher. 2. Níveis de Landau. 3. Método de Extensão Auto-Adjunta. I. Aponte, Diego Alejandro Cogollo. II. Filgueiras, Cleverson. III. Título.

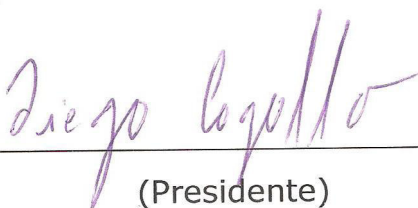
CDU 537(043)

FRANKBELSON DOS SANTOS AZEVEDO

**DINÂMICA QUÂNTICA DE UMA PARTÍCULA NEUTRA EM
CAMPOS ELÉTRICOS EXTERNOS**

Dissertação aprovada em 24/09/2015

BANCA EXAMINADORA



(Presidente)

Prof. Dr. Diego Alejandro Cogollo Aponte
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Co-Orientador)

Prof. Dr. Cleverson Filgueiras
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro interno)

Prof. Dr. Douglas Vitoreti da Silva
Unidade Acadêmica de Física – UFCG



(Membro externo)

Prof. Dr. Sérgio Martins de Souza
Departamento de Física – UFLA

À Minha Família e Amigos.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Francisco Gomes e Maria José, e ao meu irmão Franciélio Azevedo por me apoiarem sempre.

Aos meus parentes e amigos que torcem pelo meu sucesso.

Ao meu orientador Dr. Diego Cogollo e ao meu coorientador Dr. Cleverson Filgueiras pelos ensinamentos e pela forma participativa e motivadora que me orientaram neste trabalho. Eles me fizeram sentir como parte de um time.

Ao Dr. Edilberto Silva que mesmo de longe sempre esteve a disposição para me ajudar com este trabalho. Trata-se de uma pessoa gentil e atenciosa.

Aos colegas de mestrado Lázaro Leite, Rosenildo Nascimento, Gival Pordeus, Ozorio Netto, Arthur Cavalcanti, Tércio Melo, Wagner Almeida, Gilvam Bonfim e Gabriela Coutinho pelas discussões e apoio.

Aos professores e funcionários do departamento de física da UFCG pelo acolhimento.

A CAPES pelo apoio financeiro.

*”A natureza não tem pressa. Se-
gue seu compasso. Inexoravel-
mente chega lá.”*

Accioly Neto

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar a dinâmica quântica planar de partículas neutras de spin-1/2 na presença de campos elétricos. A priori uma partícula com carga nula não devia interagir com campos eletromagnéticos, mas ao admitir partículas possuindo momento de dipolo magnético, vemos que a interação é possível. Tal estudo acontece através da equação de Dirac com acoplamento não-mínimo, onde o termo de interação leva em conta o momento de dipolo magnético, spin da partícula e campo eletromagnético. A partir dessa equação, derivamos e resolvemos duas equações diferenciais de primeira ordem, mostrando que as soluções estão atreladas ao spin. As soluções para o efeito Aharonov-Casher é discutida em detalhes pela primeira vez neste trabalho. Também derivamos uma equação diferencial de segunda ordem, a partir da qual obtivemos o níveis de energia para uma partícula movimentando-se em um caminho circular de raio constante. Além disso, usando o método de extensão auto-adjunta, encontramos funções de onda de estados ligados e níveis de energia para o espaço completo, incluindo a região $r = 0$. Os níveis de energia obtidos são análogos aos níveis de Landau, e mostram uma dependência com o parâmetro projeção de spin. Por fim, tomamos o limite não relativístico para o espaço completo.

Palavras-chave: Efeito Aharonov-Casher - Níveis de Landau - Método de Extensão Auto-adjunta.

Abstract

This work aims to study the planar quantum dynamics of neutral particles of spin- $1/2$ in the presence of electric fields. A priori a particle with null charge should not interact with electromagnetic fields, but to admit particles having magnetic dipole moment, we see that the interaction is possible. Such study happens through the Dirac equation with non-minimal coupling, where the interaction term takes into account the magnetic dipole moment, spin of the particle and electromagnetic field. From this equation, we derive and solve two differential equations of first order, showing that the solutions are linked to spin. The solutions to the Aharonov-Casher effect are discussed in detail for the first time in this study. We also derive a differential equation of second order, from which we obtained the energy levels for a particle moving in a constant radius circular path. In addition, using the self-adjoint extension method, we find wave functions of bound states and energy levels to the full space, including the region $r = 0$. The energy levels obtained are analogous to Landau levels, and show a dependence on the spin projection parameter. Finally, we take the non-relativistic limit for the full space.

Keywords: Aharonov-Casher Effect - Landau Levels - Self-adjoint Extension Method.

Lista de Figuras

3.1	Gráfico da energia em função do raio para $s = 1$ e diferentes valores de m .	32
3.2	Gráfico da energia em função de λ_1 para $s = 1$ e diferentes valores de n e m .	37
3.3	Gráfico da energia em função de λ_1 para $s = -1$ e diferentes valores de n e m	37

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Equação de Dirac	4
2.1 Equação de Klein-Gordon	4
2.2 Derivação da Equação de Dirac	6
2.3 Simetria Global e Local do Lagrangiano de Dirac	10
2.4 Equação de Dirac com Acoplamento Não-mínimo	11
2.4.1 Transformação de Paridade	12
2.4.2 Inversão Temporal	13
2.4.3 Conjugação da Carga	17
3 Efeito do Spin na Interação de Partícula Neutra com Campos Elétricos	21
3.1 Equação de Movimento	21
3.2 Obtendo as Equações de Primeira Ordem	23
3.3 Soluções Isoladas e o Problema de Aharonov-Casher	25
3.3.1 Caso $E = M$ (Soluções para Partículas)	26
3.3.2 Caso $E = -M$ (Soluções para Antipartículas)	26
3.4 Equação de Segunda Ordem	27
3.5 Movimento em um Anel de Raio Constante	30

3.6	Análise de Extensão Auto-adjunta e a Dinâmica Incluindo a Região $\rho = 0$.	32
3.7	Limite Não Relativístico	38
4	Conclusões e Perspectivas	40
A	Método de Extensão Auto-adjunta	42
	Referências Bibliográficas	45

Capítulo 1

Introdução

Os efeitos topológicos tem sido um dos problemas mais estudados em mecânica quântica planar nos últimos anos. Estes fenômenos não detém um análogo clássico como acontece em boa parte da física, os mesmos estão associados a conexão com o espaço-tempo [1]. O trabalho de Aharonov e Bohm [2], onde é proposto o primeiro exemplo de fase topológica adquirida por um elétron quando viaja numa região livre de campo magnético é o grande incentivador de pesquisas nessa área. Este fenômeno é conhecido como efeito Aharonov-Bohm (AB), e serve de base para estudos das propriedades de outros fenômenos que conduzem a efeitos semelhantes. Por exemplo, o trabalho de Aharonov e Casher [3] previu que a função de onda de uma partícula neutra com um momento de dipolo magnético adquire uma fase topológica ao viajar em um caminho fechado que circunda um fio infinitamente longo carregado com uma densidade de carga uniforme (efeito Aharonov-Casher (AC)), onde o campo elétrico é inversamente proporcional a coordenada espacial ρ , e fornece um divergente proporcional a função $\delta(\rho)$. Posteriormente, vários outros efeitos do tipo AB foram descobertos ao longo dos últimos anos [4]-[9].

Uma importante questão desses fenômenos deve-se a interferência do spin sobre a dinâmica de efeitos topológicos. O primeiro trabalho neste contexto foi proposto por Hagen [10], no qual, ele estuda o espalhamento relativístico de uma partícula de spin-1/2 sob um potencial AB. Hagen mostrou em uma reformulação do problema com uma fonte de raio finito que a função delta é a responsável por soluções singulares na origem. Ele também concluiu que as modificações na amplitude que surgem a partir da inclusão do spin são consideradas para modificar a seção de choque para o caso de feixes polarizados. O mesmo autor estabeleceu uma equivalência exata entre os efeitos AB e AC para

partículas de spin-1/2 [11]. Ainda nesta referência, ele menciona a necessidade de manutenção do divergente da configuração de campo utilizada na referência [3] para garantir a correspondência. A implicação física deste termo vem sendo estudado nos últimos anos [12]-[15]. O efeito AC como também o efeito AB vem sendo direcionado para o estudo dos níveis de energia de estados ligado. No contexto do método dos operadores em mecânica quântica, tais estados ligados foram encontrados através de modelagem do problema por condições de contorno na origem [14]-[25].

Em nossa pesquisa, consideramos a dinâmica planar de uma partícula neutra com momento de dipolo magnético interagindo com uma classe de campos elétricos formada pela junção das configurações de campo utilizada na referência [3] e a proposta por Ericsson e Sjöqvist, na qual o campo elétrico é proporcional a coordenada ρ , e o divergente resulta na própria densidade de carga. O interesse de Ericsson e Sjöqvist era estudar o análogo atômico da quantização de Landau baseada no efeito AC [26]. Essa configuração ainda foi usada para estudar os níveis de Landau na dinâmica não relativística de uma partícula neutra que possui um momento de dipolo magnético permanente interagindo com um campo elétrico externo num espaço-tempo curvo com presença ou não de um campo de torção [27, 28].

Os próximos parágrafos referem-se a organização da dissertação.

O capítulo 2, trata-se de uma revisão sobre a equação de Dirac, que é a ferramenta principal ao longo deste trabalho. Iniciamos pela equação de Klein-Gordon que foi a primeira equação relativística na tentativa de descrever elétrons. Prosseguindo, fizemos a derivação da equação de Dirac, onde verificamos sua adaptação as condições predeterminadas, tais como: dar a relação relativística correta entre a energia e o momento, e fornecer uma densidade de probabilidade definida positiva. Também estudamos a simetria global e local do lagrangiano de Dirac, observando os aspectos relacionado a sua invariância. Por último, abordamos a equação de Dirac com acoplamento não-mínimo, onde, analisamos a dita equação sob o efeito da transformação de paridade, inversão temporal e conjugação da carga. Estes tópicos não foram encontrados em livros textos, porém, nos referenciamos no mesmo tipo de análise para equação de Dirac com acoplamento mínimo.

No capítulo 3, partindo da equação de Dirac com acoplamento não-mínimo, derivamos um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, e obtivemos as soluções de estados ligados da partícula, sendo dado foco aos efeitos devido ao spin. Esta análise, em

particular para o campo elétrico responsável pelo problema AC é discutida em detalhes pela primeira vez aqui. Também derivamos e resolvemos a equação de segunda ordem (equação de Pauli), assumindo que a partícula descreve um caminho circular de raio constante. Além disso, analisamos a dinâmica do sistema com a inclusão da região $r = 0$, para isso, utilizamos o método de extensão auto-adjunta para resolver a física do problema [29] e modelamos o hamiltoniano por condições de contorno [30]. Com isso, determinamos expressões para as funções de onda e níveis de energia da partícula, sem o surgimento de qualquer parâmetro arbitrário a partir da abordagem por extensão auto-adjunta. Para finalizarmos, examinamos os resultados da região $\rho = 0$ no limite não relativístico.

Por fim, no capítulo 4, apresentamos algumas conclusões e perspectivas.

Capítulo 2

Equação de Dirac

Neste capítulo, iniciamos nosso estudo com a equação de Klein-Gordon, em seguida, derivamos a equação de Dirac, onde avaliamos as condições que a mesma deve satisfazer. Também mostramos que o lagrangiano livre de Dirac é invariante por transformação global, mas não é por transformação local. Por último, apresentamos a equação de Dirac com acoplamento não mínimo, e vimos que ela é simétrica por transformação de paridade, inversão temporal e conjugação da carga.

2.1 Equação de Klein-Gordon

Em mecânica quântica não relativística, a equação de Schrödinger para uma partícula livre é dada por

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \nabla^2 \psi, \quad (2.1)$$

onde $\psi = \psi(\mathbf{x}, t)$ [31]. Podemos reescrever a equação (2.1) na forma de operadores como

$$\hat{E}\psi = \hat{H}\psi, \quad (2.2)$$

sendo

$$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \hat{H} = -\frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_0}, \quad (2.3)$$

onde $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \nabla$. Afim de obtermos uma equação de onda relativística consideramos uma partícula livre com a seguinte relação

$$p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = m_0^2 c^2. \quad (2.4)$$

Aqui m_0 é a massa de repouso e c a velocidade da luz no vácuo. Substituindo o quadri-momento p^μ pelo operador

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right] \\ &= i\hbar \left[\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right] = [\hat{p}_0, \hat{\mathbf{P}}],\end{aligned}\tag{2.5}$$

obtemos a equação de Klein-Gordon para partículas livres,

$$\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu \psi = m_0^2 c^2 \psi.\tag{2.6}$$

Como

$$\begin{aligned}\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu &= -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \hbar^2 \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right] \\ &= -\hbar^2 \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] \\ &= -\hbar^2 \square,\end{aligned}\tag{2.7}$$

então, (2.6) tornasse

$$\left(\square + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0.\tag{2.8}$$

Essa equação produz soluções de energia negativa. Isso é aceito em mecânica quântica relativística, e o significado físico está ligado a existência de antipartículas, que são constatadas experimentalmente.

Sabemos que a equação de Schrödinger fornece uma quadricorrente J_μ conservada. Podemos buscar uma mesma lei de conservação para um J_μ relacionado a equação de Klein-Gordon. Escrevendo,

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2 c^2) \psi = 0,\tag{2.9}$$

e tomando o complexo conjugado, temos

$$(\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0.\tag{2.10}$$

Multiplicando (2.9) por ψ^* pela esquerda e (2.10) por ψ também pela esquerda, e fazendo a diferença

$$\psi^* (\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2 c^2) \psi - \psi (\hat{p}^\mu \hat{p}_\mu - m_0^2 c^2) \psi^* = 0,\tag{2.11}$$

que resulta,

$$\nabla_\mu (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*) = \nabla_\mu J^\mu = 0,\tag{2.12}$$

onde,

$$J_\mu = \frac{i\hbar}{2m_0} (\psi^* \nabla^\mu \psi - \psi \nabla^\mu \psi^*). \quad (2.13)$$

O termo $i\hbar/2m_0$ é colocado para fornecer uma componente J_0 com dimensão de densidade de probabilidade. A equação (2.12) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.14)$$

sendo,

$$\varrho = J_0 = \frac{i\hbar}{2m_0 c^2} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \quad (2.15)$$

e

$$\mathbf{J} = -\frac{i\hbar}{2m_0} [\psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi^*)] \quad (2.16)$$

uma densidade de corrente. A integração de (2.14) nos fornece:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho d^3x = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} d^3x = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.17)$$

Assim,

$$\int_V \varrho d^3x = \text{const.} \quad (2.18)$$

com relação ao tempo. Um problema surge aqui: não podemos interpretar ϱ como uma densidade de probabilidade, o que naturalmente vem em nossa mente. A razão para essa impossibilidade deve-se a ψ e $\partial\psi/\partial t$ em um dado tempo t possuírem valores arbitrários, o que implica em (2.15) não ser definida positiva. Essa densidade será reinterpretada como uma densidade de cargas [32, 33].

2.2 Derivação da Equação de Dirac

A equação de Klein-Gordon não tinha sentido físico por volta de 1928 devido a não descoberta de partículas de spin-0 que corroborassem com a interpretação de ϱ como uma densidade de carga. Com isso, Dirac procurou uma equação de onda covariante com a forma da equação de Schrödinger [32]. Como (2.1) é linear na derivada temporal, é aceitável construirmos um hamiltoniano com derivadas espaciais também lineares,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left[-i\hbar c \left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \right) + \beta m_0 c^2 \right] \psi \\ i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left(-i\hbar c \sum_{k=1}^3 \alpha_k \frac{\partial}{\partial x^k} + \beta m_0 c^2 \right) \psi, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde α_k e β são matizes $N \times N$, e ψ é uma matriz coluna com N elementos,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x, t) \\ \psi_2(x, t) \\ \vdots \\ \psi_N(x, t) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Para a equação matricial (2.19) ter sentido, ela terá que satisfazer as seguintes condições:

- Dar a relação correta entre a energia e o momento, ou seja, $E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$;
- Fornecer uma densidade de probabilidade definida positiva;
- Deve ser covariante para as transformações de Lorentz.

Para obtermos a relação correta entre a energia e o momento, a equação (2.19) terá que satisfazer a equação de Klein-Gordon,

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m_0^2 c^4) \psi. \quad (2.21)$$

Iterando a equação (2.19), encontramos

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \alpha_i \alpha_j \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - i\hbar m_0 c^3 \sum_i^3 \alpha_i \beta \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \\ &\quad - i\hbar m_0 c^3 \sum_j^3 \beta \alpha_j \frac{\partial \psi}{\partial x^j} + \beta^2 m_0^2 c^4 \psi, \end{aligned} \quad (2.22)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\hbar^2 c^2 \sum_{i,j=1}^3 \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \\ &\quad - i\hbar m_0 c^3 \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \beta^2 m_0^2 c^4 \psi. \end{aligned} \quad (2.23)$$

A equação (2.21) será satisfeita se:

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij}; \quad (2.24)$$

$$\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0; \quad (2.25)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1. \quad (2.26)$$

Para o hamiltoniano em (2.19) ser hermitiano, as matrizes α_i e β devem ser hermiticas. Ou seja,

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i \quad (2.27)$$

e

$$\beta^\dagger = \beta. \quad (2.28)$$

Devido a isso, e a equação (2.26), os autovalores dessas matrizes são ± 1 . A partir da equação (2.25), temos

$$\alpha_i = -\beta\alpha_i\beta. \quad (2.29)$$

Usando a identidade para o traço de produto de matrizes,

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA), \quad (2.30)$$

encontramos

$$\text{Tr}(\alpha_i) = \text{Tr}(-\beta\alpha_i\beta) = -\text{Tr}(\beta^2\alpha_i) = -\text{Tr}(\alpha_i). \quad (2.31)$$

Então,

$$\text{Tr}(\alpha_i) = 0. \quad (2.32)$$

As matrizes de dimensão $N = 2$ não podem ser usadas para representar α_i e β , pois, só existem três matrizes com essa dimensão que anticomutam, as chamadas *matrizes de Pauli*:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

A dimensão $N = 4$ é a menor, na qual, encontramos matrizes que satisfazem todas as condições discutidas acima. Isso acontece através da *representação de Dirac*, que é escrita em termos das matrizes (2.33):

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Vamos agora verificar se a equação (2.19) fornece uma densidade de probabilidade definida positiva. Tomando o conjugado hermitiano da dita equação,

$$i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = -i\hbar c \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^i} \alpha_i + m_0 c^2 \psi^\dagger \beta, \quad (2.35)$$

e multiplicando por ψ pela direita, obtemos

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi = i\hbar c \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x^i} \alpha_i \psi + m_0 c^2 \psi^\dagger \beta \psi. \quad (2.36)$$

Além disso, multiplicando (2.19) por ψ^\dagger pela esquerda,

$$i\hbar \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c \sum_{i=1}^3 \psi^\dagger \alpha_i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} + m_0 c^2 \psi^\dagger \beta \psi, \quad (2.37)$$

e subtraindo de (2.36), encontramos

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\psi^\dagger \psi) = -i\hbar c \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x^i} (\psi^\dagger \alpha_i \psi) \quad (2.38)$$

ou

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \varrho = \psi^\dagger \psi &= (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^4 \psi_i^* \psi_i \end{aligned} \quad (2.40)$$

é uma densidade de probabilidade definida positiva e

$$\mathbf{J} = c \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi \quad (2.41)$$

uma densidade de corrente. Integrando (2.39) em todo o espaço, temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, d^3x = - \int_V \nabla \cdot \mathbf{J} \, d^3x = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.42)$$

que concorda com ϱ como uma densidade de probabilidade.

A terceira condição que diz respeito a covariância da equação de Dirac por transformações de Lorentz não será mostrada aqui, mas a mesma pode ser encontrada na referência [32].

Podemos reescrever a equação de Dirac numa notação quadrimensional. Para isso, multiplicamos (2.19) por β/c :

$$\left(i\hbar \beta \frac{\partial \psi}{\partial(ct)} + i\hbar \sum_{k=1}^3 \beta \alpha_k \frac{\partial}{\partial x^k} - m_0 c \right) \psi = 0. \quad (2.43)$$

Definindo as matrizes,

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^i) = (\beta, \beta\alpha_i), \quad (2.44)$$

onde

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

encontramos

$$(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - m_0c)\psi = 0, \quad (2.46)$$

sendo $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ o tensor métrico do espaço de Minkowski [34].

2.3 Simetria Global e Local do Lagrangiano de Dirac

Podemos verificar facilmente que o lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_0c^2\bar{\psi}\psi \quad (2.47)$$

é invariante por uma transformação de fase global

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta}\psi \implies \bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\theta}\bar{\psi}, \quad (2.48)$$

onde θ é um número real arbitrário. No entanto, sob uma transformação de fase local em que θ varia ponto a ponto no espaço (função de x^μ)

$$\psi \longrightarrow e^{i\theta(x)}\psi \implies \bar{\psi} \longrightarrow e^{-i\theta(x)}\bar{\psi}, \quad (2.49)$$

o lagrangiano (2.47) não é invariante. Devido a:

$$\partial_\mu\psi \longrightarrow \partial_\mu(e^{i\theta(x)}\psi) = i\partial_\mu\theta(x)e^{i\theta(x)}\psi + e^{i\theta(x)}\partial_\mu\psi, \quad (2.50)$$

temos

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} - \hbar c\partial_\mu\theta(x)\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad (2.51)$$

que mostra a não invariância do lagrangiano.

Vamos buscar um lagrangiano que seja invariante por transformações locais. Fazendo a mudança

$$\lambda(x) = -\frac{q}{\hbar c}\theta(x) \quad (2.52)$$

onde q é a carga da partícula envolvida, a transformação de fase local passa a ser

$$\psi \longrightarrow e^{-iq\lambda(x)/\hbar c}\psi \implies \bar{\psi} \longrightarrow e^{iq\lambda(x)/\hbar c}\bar{\psi}, \quad (2.53)$$

e o lagrangiano

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L} + q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\lambda(x). \quad (2.54)$$

Precisamos adicionar um novo termo a (2.47) afim de obtermos um lagrangiano invariante localmente. Propondo

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m_0c^2\bar{\psi}\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \quad (2.55)$$

onde A_μ (campo de gauge) é um campo que varia com x^μ , e

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu\lambda(x). \quad (2.56)$$

Com isso, o termo $\partial_\mu\lambda(x)$ na transformação acima (transformação de gauge) elimina o termo extra produzido pela não invariância local (2.54), garantindo que o lagrangiano proposto (lagrangiano de Dirac com acoplamento mínimo) seja localmente invariante. Para entendermos (2.55), vejamos

$$\partial_\mu\psi = e^{-iq\lambda(x)/\hbar c} \left[\partial_\mu - i\frac{q}{\hbar c}\partial_\mu\lambda(x) \right] \psi \quad (2.57)$$

ao usarmos (2.53). Substituindo o *acoplamento mínimo*,

$$\partial_\mu \longrightarrow \partial_\mu + i\frac{q}{\hbar c}A_\mu \equiv D_\mu \quad (2.58)$$

e a transformação de gauge no lagrangiano livre de Dirac, o segundo termo indesejado em (2.57) é cancelado, de modo que (2.47) recai em (2.55). Portanto, a substituição de ∂_μ por D_μ onde

$$D_\mu\psi \longrightarrow e^{-iq\lambda(x)/\hbar c} D_\mu\psi \quad (2.59)$$

é um dispositivo simples capaz de transformar um lagrangiano globalmente invariante em localmente invariante [34, 35].

2.4 Equação de Dirac com Acoplamento Não-mínimo

A equação de Dirac em $(3+1)$ dimensões¹ que trata da dinâmica de uma partícula neutra de spin-1/2 com massa M e momento de dipolo magnético μ , na presença de campo eletromagnético externo descrito pelo tensor $F_{\mu\nu}$ é dada por [36]

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{\mu}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - M \right] \psi = 0, \quad (2.60)$$

¹A partir de agora usaremos o sistema natural de unidades, onde $c = \hbar = 1$.

onde

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.61)$$

é um operador relacionado ao spin da partícula.

Agora vamos mostrar que a equação (2.60) obedece as simetrias de *transformação de paridade, inversão temporal e conjugação da carga*.

2.4.1 Transformação de Paridade

A paridade transforma \mathbf{x} em $-\mathbf{x}$, executando a transformação do espinor $\psi(\mathbf{x}, t)$ em $\psi'(\mathbf{x}', t)$ (função de onda refletida espacialmente). A transformação de paridade é dada por

$$P\psi(\mathbf{x}, t) = \psi'(\mathbf{x}', t) = e^{i\phi}\gamma^0\psi(-\mathbf{x}, t), \quad (2.62)$$

onde $e^{i\phi}$ é uma fase arbitrária. Essa transformação muda o sinal do momento da partícula mas não muda o spin [32, 37]. Então, se ψ representa uma partícula de helicidade positiva, ψ' representará uma partícula de helicidade negativa, e vice-versa. A paridade executa os seguintes efeitos:

$$\begin{aligned} \partial'_0 &= \partial_0, & t' &= t, \\ \partial'_i &= -\partial_i, & \mathbf{x}' &= -\mathbf{x}, \\ A'_0 &= A_0, & A'_i &= -A_i, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde $A_\mu = (A_0, A_i)$ é o quadrivetor potencial. Expandindo a equação (2.60), obtemos

$$\left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F_{00} + \sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{i0}F_{i0} + \sigma^{ij}F_{ij}) - M \right] \psi = 0. \quad (2.64)$$

Como $P\psi = \psi' \Rightarrow \psi = P^{-1}\psi'$, então

$$\left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F_{00} + \sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{i0}F_{i0} + \sigma^{ij}F_{ij}) - M \right] P^{-1}\psi' = 0. \quad (2.65)$$

Multiplicando a equação (2.65) por P pela esquerda

$$P \left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F_{00} + \sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{i0}F_{i0} + \sigma^{ij}F_{ij}) - M \right] P^{-1}\psi' = 0, \quad (2.66)$$

e escrevendo P e P^{-1} de forma explícita, temos

$$e^{i\phi}\gamma^0 \left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F_{00} + \sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{i0}F_{i0} + \sigma^{ij}F_{ij}) - M \right] e^{-i\phi}\gamma^0\psi' = 0. \quad (2.67)$$

Usando (2.63), e

$$\begin{aligned}
F_{00} &= \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 = \partial'_0 A'_0 - \partial'_0 A'_0 = F'_{00}, \\
F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial'_0 A'_i + \partial'_i A'_0 = -F'_{0i}, \\
F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial'_i A'_0 + \partial'_0 A'_i = -F'_{i0}, \\
F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = \partial'_i A'_j - \partial'_j A'_i = F'_{ij},
\end{aligned} \tag{2.68}$$

encontramos

$$\gamma^0 \left[i\gamma^0 \partial'_0 - i\gamma^i \partial'_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F'_{00} - \sigma^{0i} F'_{0i} - \sigma^{i0} F'_{i0} + \sigma^{ij} F'_{ij}) - M \right] \gamma^0 \psi' = 0. \tag{2.69}$$

Porém,

$$\begin{aligned}
\{\gamma^0, \gamma^i\} &= \gamma^0 \gamma^i + \gamma^i \gamma^0 = 0, \\
\{\gamma^0, \sigma^{0i}\} &= \gamma^0 \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) + \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^i - \gamma^i \gamma^0) \gamma^0 = 0, \\
\{\gamma^0, \sigma^{i0}\} &= \gamma^0 \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i) + \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^i) \gamma^0 = 0, \\
[\gamma^0, \sigma^{00}] &= \gamma^0 \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^0) - \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^0) \gamma^0 = 0, \\
[\gamma^0, \sigma^{ij}] &= \gamma^0 \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) - \frac{i}{2} (\gamma^i \gamma^j - \gamma^j \gamma^i) \gamma^0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Portanto, (2.71) torna-se

$$\left[i\gamma^0 \partial'_0 + i\gamma^i \partial'_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F'_{00} + \sigma^{0i} F'_{0i} + \sigma^{i0} F'_{i0} + \sigma^{ij} F'_{ij}) - M \right] \psi' = 0, \tag{2.71}$$

ou ainda

$$\left[i\gamma^\mu \partial'_\mu - \frac{\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} - M \right] \psi' = 0, \tag{2.72}$$

que tem a mesma forma de (2.60). Isso significa que se a partícula neutra de spin-1/2 representada pelo ψ da equação (2.60) for do tipo “left-handed”, então o ψ' da equação (2.72) representará uma partícula “right-handed”, e vice-versa.

2.4.2 Inversão Temporal

A inversão temporal acontece quando transformamos $\psi(x, t)$ em $\psi'(x, t')$ (representa uma partícula que se move para trás no tempo), onde

$$t' = -t, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x}, \tag{2.73}$$

de modo que a função de onda transformada é dada por

$$T\psi(\mathbf{x}, t) = \psi'(\mathbf{x}, t') = T_0 K \psi(\mathbf{x}, -t) = i\gamma^1 \gamma^3 K \psi(\mathbf{x}, -t), \quad (2.74)$$

onde K é uma conjugação complexa. A inversão temporal reverte a direção do tempo, causando uma inversão do momento e spin da partícula [32, 37]. Partindo da equação (2.64), podemos escrever

$$\left[i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F_{00} + \sigma^{0i} F_{0i} + \sigma^{i0} F_{i0} + \sigma^{ij} F_{ij}) - M \right] T^{-1} \psi' = 0, \quad (2.75)$$

sendo $T\psi = \psi \Rightarrow \psi = T^{-1}\psi'$. Multiplicando (2.75) por T pela esquerda

$$T_0 K \left[i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F_{00} + \sigma^{0i} F_{0i} + \sigma^{i0} F_{i0} + \sigma^{ij} F_{ij}) - M \right] T_0^{-1} K^{-1} \psi' = 0, \quad (2.76)$$

e escrevendo T_0 e T_0^{-1} de modo explícito, temos

$$\begin{aligned} i\gamma^1 \gamma^3 K \left[i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F_{00} + \sigma^{0i} F_{0i} + \sigma^{i0} F_{i0} + \sigma^{ij} F_{ij}) - M \right] \\ (-i) \gamma^3 \gamma^1 K^{-1} \psi' = 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde $T_0^{-1} = -i\gamma^3 \gamma^1$. A reversão temporal causa os seguintes efeitos:

$$\begin{aligned} \partial'_0 &= -\partial_0, \quad \partial'_i = \partial_0, \\ A'_0 &= A_0, \quad A'_i = -A_i, \end{aligned} \quad (2.78)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} F_{00} &= \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 = -\partial'_0 A'_0 + \partial'_0 A'_0 = F'_{00}, \\ F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial'_0 A'_i - \partial'_i A'_0 = F'_{0i}, \\ F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = \partial'_i A'_0 - \partial'_0 A'_i = F'_{i0}, \\ F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\partial'_i A'_j + \partial'_j A'_i = -F'_{ij}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Usando (2.78) e (2.94), encontramos

$$\begin{aligned} i\gamma^1 \gamma^3 K \left[-i\gamma^0 \partial'_0 + i\gamma^i \partial'_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F'_{00} + \sigma^{0i} F'_{0i} + \sigma^{i0} F'_{i0} - \sigma^{ij} F'_{ij}) - M \right] \\ (-i) \gamma^3 \gamma^1 K^{-1} \psi' = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para avaliarmos a atuação de K , precisamos expandir a equação (2.80), devido a alguns termos conterem a matriz imaginária γ^2 e/ou o número imaginário i :

$$\begin{aligned}
& i\gamma^1\gamma^3K [-i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^1\partial'_1 + i\gamma^2\partial'_2 + i\gamma^3\partial'_3] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' - i\gamma^1\gamma^3K\frac{\mu}{2} \\
& \left[\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F'_{00} + \frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) F'_{0i} \right] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3K\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 + \gamma^2\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3) F'_{i0} \right] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3K\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) F'_{ij} \right] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3K\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) F'_{ij} \right] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3K\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F'_{ij} \right] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3K [M] (-i)\gamma^3\gamma^1K^{-1}\psi' = 0. \tag{2.81}
\end{aligned}$$

Após a atuação da conjugação complexa K , temos

$$\begin{aligned}
& i\gamma^1\gamma^3 [i\gamma^0\partial'_0 - i\gamma^1\partial'_1 + i\gamma^2\partial'_2 - i\gamma^3\partial'_3] i\gamma^3\gamma^1\psi' - i\gamma^1\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F'_{00} \right] i\gamma^3\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) F'_{0i} \right] i\gamma^3\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 + \gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3) F'_{i0} \right] i\gamma^3\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) F'_{ij} \right] i\gamma^3\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (-\gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2) F'_{ij} \right] i\gamma^3\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F'_{ij} \right] i\gamma^3\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3 [M] i\gamma^3\gamma^1\psi' = 0. \tag{2.82}
\end{aligned}$$

Usando as relações para γ^3 :

$$\{\gamma^3, \gamma^0\} = 0 \quad \{\gamma^3, \gamma^1\} = 0, \quad \{\gamma^3, \gamma^2\} = 0, \quad [\gamma^3, \gamma^3] = 0, \tag{2.83}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& i\gamma^1\gamma^3\gamma^3 \left[-i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^1\partial'_1 - i\gamma^2\partial'_2 - i\gamma^3\partial'_3 \right] i\gamma^1\psi' - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\frac{\mu}{2} \\
& \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F'_{00} - \frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0) F'_{0i} \right] i\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 - \gamma^3\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3) F'_{i0} \right] i\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1) F'_{ij} \right] i\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (-\gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) F'_{ij} \right] i\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (-\gamma^3\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F'_{ij} \right] i\gamma^1\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3 [M] i\gamma^1\psi' = 0.
\end{aligned} \tag{2.84}$$

Seguindo o mesmo procedimento para γ^1 que obedece as relações:

$$\{\gamma^1, \gamma^0\} = 0 \quad \{\gamma^1, \gamma^2\} = 0, \quad \{\gamma^1, \gamma^3\} = 0, \quad [\gamma^1, \gamma^1] = 0, \tag{2.85}$$

encontramos

$$\begin{aligned}
& i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1 \left[i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^1\partial'_1 + i\gamma^2\partial'_2 + i\gamma^3\partial'_3 \right] i\psi' - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\frac{\mu}{2} \\
& \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F'_{00} - \frac{i}{2} (-\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0) F'_{0i} \right] i\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (-\gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^1 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 - \gamma^3\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3) F'_{i0} \right] i\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) F'_{ij} \right] i\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) F'_{ij} \right] i\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F'_{ij} \right] i\psi' \\
& - i\gamma^1\gamma^3\gamma^3\gamma^1 [M] i\psi' = 0,
\end{aligned} \tag{2.86}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
& [i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^1\partial'_1 + i\gamma^2\partial'_2 + i\gamma^3\partial'_3] \psi' - \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F'_{00} \right] \psi' \\
& - \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) F'_{0i} \right] \psi' \\
& - \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 + \gamma^2\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3) F'_{i0} \right] \psi' \\
& - \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) F'_{ij} \right] \psi' \\
& - \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) F'_{ij} \right] \psi' \\
& - \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F'_{ij} \right] \psi' - M\psi' = 0. \tag{2.87}
\end{aligned}$$

A equação (2.87) pode ser escrita de maneira compacta como

$$\left[i\gamma^0\partial'_0 + i\gamma^i\partial'_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F'_{00} + \sigma^{0i}F'_{0i} + \sigma^{i0}F'_{i0} + \sigma^{ij}F'_{ij}) - M \right] \psi' = 0, \tag{2.88}$$

ou ainda

$$\left[i\gamma^\mu\partial'_\mu - \frac{\mu}{2}\sigma^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} - M \right] \psi' = 0, \tag{2.89}$$

que tem a mesma forma da equação (2.60). Portanto, o espinor ψ' da equação (2.89) representa a mesma partícula designada pelo espinor ψ da equação (2.60), mas com a inversão do sinal do momento e spin.

2.4.3 Conjugação da Carga

A conjugação da carga nos diz que se ψ representa uma partícula de Dirac de carga e e massa m_0 , então o espinor de carga conjugada, ψ_c , corresponde a uma partícula de Dirac de mesma massa m_0 e carga oposta $-e$. A interpretação para isso vem da “teoria dos buracos”, ou seja, uma partícula representada por ψ tem uma antipartícula designada por ψ_c . Essa interpretação também vale para o caso de partículas neutras. A transformação entre os dois estados é dada por

$$\psi_c = \hat{C}\psi = C\gamma^0 K\psi = i\gamma^2 K\psi, \tag{2.90}$$

onde K é uma conjugação complexa [32, 37]. A partir da equação (2.64), podemos escrever

$$\left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F_{00} + \sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{i0}F_{i0} + \sigma^{ij}F_{ij}) - M \right] \hat{C}^{-1}\psi_c = 0, \tag{2.91}$$

sendo $\hat{C}\psi = \psi_c \Rightarrow \psi = \hat{C}^{-1}\psi_c$. Além disso, multiplicando (2.91) por \hat{C} pela esquerda, temos

$$i\gamma^2 K \left[i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^i \partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00} F_{00} + \sigma^{0i} F_{0i} + \sigma^{i0} F_{i0} + \sigma^{ij} F_{ij}) - M \right] (i\gamma^2 K)^{-1} \psi_c = 0. \quad (2.92)$$

A conjugação de carga causa a seguinte transformação:

$$A_\mu = -A_\mu, \quad (2.93)$$

por consequência, temos

$$\begin{aligned} F_{00} &= \partial_0 A_0 - \partial_0 A_0 = -\partial_0 A_0 + \partial_0 A_0 = F_{00}, \\ F_{0i} &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = -\partial_0 A_i + \partial_i A_0 = -F_{0i}, \\ F_{i0} &= \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i A_0 + \partial_0 A_i = -F_{i0}, \\ F_{ij} &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\partial_i A_j + \partial_j A_i = -F_{ij}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Levando isso em consideração, e explicitando (2.92), obtemos

$$\begin{aligned} & i\gamma^2 K [i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^1 \partial_1 + i\gamma^2 \partial_2 + i\gamma^3 \partial_3] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c - i\gamma^2 K \frac{\mu}{2} \\ & \left[\frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^0) F_{00} + \frac{i}{2} (\gamma^0 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^0 + \gamma^0 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^0) (-F_{0i}) \right] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c \\ & - i\gamma^2 K \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^1 + \gamma^2 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^2 + \gamma^3 \gamma^0 - \gamma^0 \gamma^3) (-F_{i0}) \right] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c \\ & - i\gamma^2 K \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^1) (-F_{ij}) \right] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c \\ & - i\gamma^2 K \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^2 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^2) (-F_{ij}) \right] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c \\ & - i\gamma^2 K \frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^3 \gamma^1 - \gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2 - \gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^3 - \gamma^3 \gamma^3) (-F_{ij}) \right] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c \\ & - i\gamma^2 K [M] i\gamma^2 K^{-1} \psi_c = 0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Após a atuação da conjugação complexa K , encontramos

$$\begin{aligned}
& i\gamma^2 [-i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 - i\gamma^3\partial_3] (-i)\gamma^2\psi_c - i\gamma^2\frac{\mu}{2} \\
& \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F_{00} - \frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) (-F_{0i}) \right] (-i)\gamma^2\psi_c \\
& - i\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 + \gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3) (-F_{i0}) \right] (-i)\gamma^2\psi_c \\
& - i\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) (-F_{ij}) \right] (-i)\gamma^2\psi_c \\
& - i\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (-\gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2) (-F_{ij}) \right] (-i)\gamma^2\psi_c \\
& - i\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) (-F_{ij}) \right] (-i)\gamma^2\psi_c \\
& - i\gamma^2 [M] (-i)\gamma^2\psi_c = 0.
\end{aligned} \tag{2.96}$$

Usando as relações:

$$\{\gamma^2, \gamma^0\} = 0 \quad \{\gamma^2, \gamma^1\} = 0, \quad \{\gamma^2, \gamma^3\} = 0, \quad [\gamma^2, \gamma^2] = 0, \tag{2.97}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& i\gamma^2\gamma^2 [i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 + i\gamma^3\partial_3] (-i)\psi_c - i\gamma^2\gamma^2\frac{\mu}{2} \\
& \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F_{00} + \frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) F_{0i} \right] (-i)\psi_c \\
& - i\gamma^2\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 + \gamma^2\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3) F_{i0} \right] (-i)\psi_c \\
& - i\gamma^2\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) F_{ij} \right] (-i)\psi_c \\
& - i\gamma^2\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) F_{ij} \right] (-i)\psi_c \\
& - i\gamma^2\gamma^2\frac{\mu}{2} \left[\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F_{ij} \right] (-i)\psi_c \\
& - i\gamma^2\gamma^2 [M] (-i)\psi_c = 0.
\end{aligned} \tag{2.98}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
& \left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\partial_1 + i\gamma^2\partial_2 + i\gamma^3\partial_3 \right] \psi_c - \frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^0 - \gamma^0\gamma^0) F_{00} \right] \psi_c \\
& - \frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^0\gamma^1 - \gamma^1\gamma^0 + \gamma^0\gamma^2 - \gamma^2\gamma^0 + \gamma^0\gamma^3 - \gamma^3\gamma^0) F_{0i} \right] \psi_c \\
& - \frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^0 - \gamma^0\gamma^1 + \gamma^2\gamma^0 - \gamma^0\gamma^2 + \gamma^3\gamma^0 - \gamma^0\gamma^3) F_{i0} \right] \psi_c \\
& - \frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^1\gamma^1 - \gamma^1\gamma^1 + \gamma^1\gamma^2 - \gamma^2\gamma^1 + \gamma^1\gamma^3 - \gamma^3\gamma^1) F_{ij} \right] \psi_c \\
& - \frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^2\gamma^1 - \gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^2 - \gamma^2\gamma^2 + \gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) F_{ij} \right] \psi_c \\
& - \frac{\mu}{2} \left[-\frac{i}{2} (\gamma^3\gamma^1 - \gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2 - \gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^3 - \gamma^3\gamma^3) F_{ij} \right] \psi_c - M\psi_c = 0. \quad (2.99)
\end{aligned}$$

A equação (2.99) pode ser escrita de forma compacta como

$$\left[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - \frac{\mu}{2} (\sigma^{00}F_{00} + \sigma^{0i}F_{0i} + \sigma^{i0}F_{i0} + \sigma^{ij}F_{ij}) - M \right] \psi_c = 0, \quad (2.100)$$

ou ainda

$$\left[i\gamma^\mu\partial_\mu - \frac{\mu}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - M \right] \psi_c = 0, \quad (2.101)$$

que tem a mesma forma de (2.60). Esse resultado significa que a partícula neutra de spin-1/2 representada pelo ψ da equação (2.60) possui uma antipartícula designada pelo ψ_c da equação (2.101).

Capítulo 3

Efeito do Spin na Interação de Partícula Neutra com Campos Elétricos

Neste capítulo, derivamos a forma planar da equação de Dirac com acoplamento não-mínimo. Através dessa equação, obtivemos um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem e encontramos suas soluções. Também derivamos uma equação diferencial quadrática. A partir dela, estudamos o movimento de uma partícula em um caminho circular de raio constante, e usando o método de extensão auto-adjunta encontramos os níveis de energia e as funções de onda de estados ligados para o espaço completo, incluindo a região $\rho = 0$. Por último, analisamos o limite não relativístico.

Os resultados que veremos a seguir estão publicados no artigo (F.S. Azevedo, Edilberto O. Silva, Luis B. Castro, Cleverton Filgueiras, D. Cogollo, Ann. Phys. 362 (2015) 196-207.).

3.1 Equação de Movimento

No capítulo anterior, vimos que a equação de Dirac com acoplamento não-mínimo, (2.60), é dada por

$$\left[i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - M \right] \psi = 0, \quad (3.1)$$

onde μ é o momento de dipolo magnético, e $F_{\mu\nu}$ é o tensor eletromagnético cujas componentes podem ser obtidas a partir de ¹

$$F_{0i} = E^i = -E_i, \quad (3.2)$$

$$F_{ij} = -\varepsilon_{ijk} B^k = \varepsilon_{ijk} B_k, \quad (3.3)$$

e

$$(\sigma^{0j}, \sigma^{ij}) = (i\alpha^j, -\varepsilon_{ijk}\Sigma^k), \quad (3.4)$$

ou ainda,

$$\sigma^{0i} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ij} = - \begin{pmatrix} \varepsilon_{ijk}\sigma^k & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ijk}\sigma^k \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

sendo Σ^k o vetor de spin, e $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ as matrizes de Pauli - são as componentes do operador

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (3.6)$$

Usamos a seguinte representação para as matrizes γ :

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Além disso,

$$\alpha^i = \beta\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Sigma^k = \begin{pmatrix} \sigma^k & 0 \\ 0 & \sigma^k \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Para o problema de Aharonov-Casher (ausência de campo magnético) [36], a única componente não-nula de $F_{\mu\nu}$ são as do campo elétrico $E^i = F_{0i}$, pois, nesse efeito as componentes F_{ij} não aparecem devido a não inclusão de campo magnético. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} &= \sigma^{0i}F^{0i} = -i\alpha^i E_i \\ &= -i\beta\gamma^i E_i. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, a equação (3.1) torna-se

$$[\beta\gamma^i p_i + \beta M - i\mu\beta\gamma^i E_i] \psi = \mathcal{E}\psi \quad (3.10)$$

onde, $p_i = -i\partial_i$ e $\mathcal{E} = i\partial_0$.

¹A componente F_{00} não é mencionada devido a diagonal principal da matriz $F_{\mu\nu}$ ser nula. Isso também explica as componentes F_{ij} serem escritas em termo do tensor de Levi-Civita.

Devido a invariância translacional do sistema ao longo do eixo z , estamos interessados apenas em uma dinâmica puramente planar ($p_z = E_z = 0$). Para isso, usamos convenientemente a representação de Pauli das matrizes de Dirac [11]

$$\alpha_1 = \beta\gamma^1 = \sigma_1, \quad \alpha_2 = \beta\gamma^2 = s\sigma_2, \quad \beta = \gamma^0 = \sigma_3, \quad (3.11)$$

onde o parâmetro s é o dobro do valor de spin, com $s = +1$ para spin “up” e $s = -1$ para spin “down”, e $\gamma^3=0$ (isso garante $p_z = E_z = 0$). Ainda seguindo a referência [11], podemos escrever

$$\gamma^i = is\epsilon_{ij}\beta\gamma^j, \quad (3.12)$$

que resulta em

$$\gamma^1 = is\epsilon_{1j}\beta\gamma^j = is\epsilon_{12}\beta\gamma^2 = is(s\sigma_2) = i\sigma_2, \quad (3.13)$$

$$\gamma^2 = is\epsilon_{2j}\beta\gamma^j = is\epsilon_{21}\beta\gamma^1 = -is\sigma_1. \quad (3.14)$$

Esse resultado está de acordo com a equação (3.11). Assim, a equação (3.10) pode ser reescrita como

$$[\beta\gamma^i p_i + \beta M - \mu s \beta \gamma^i \check{E}_i] \psi = \mathcal{E}\psi, \quad (3.15)$$

onde $\check{E}_i = \epsilon_{ij}E_j$, $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$. A equação (3.15) pode ser escrita de maneira compacta,

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mu s \check{\mathbf{E}}) + \beta M] \Psi = \mathcal{E}\psi. \quad (3.16)$$

Usando a equação (3.11) podemos rescrever a equação anterior, na seguinte forma:

$$[\sigma_1 (p_1 - \mu s \check{E}_1) + s\sigma_2 (p_2 - \mu s \check{E}_2) + \sigma_3 M] \psi = \mathcal{E}\psi. \quad (3.17)$$

3.2 Obtendo as Equações de Primeira Ordem

Para obtermos as equações diferenciais em primeira ordem devemos resolver a equação (3.17), para isso, vejamos que:

$$\check{E}_1 = \epsilon_{1j}E_j = \epsilon_{12}E_2 = E_2, \quad (3.18)$$

$$\check{E}_2 = \epsilon_{2j}E_j = \epsilon_{21}E_1 = -E_1. \quad (3.19)$$

Substituindo isso na equação (3.17), temos

$$[\sigma_1 (p_1 - \mu s E_2) + s\sigma_2 (p_2 + \mu s E_1) + \sigma_3 M] \psi = \mathcal{E}\psi. \quad (3.20)$$

Sendo, $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ as matrizes de Pauli, e o espinor

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

ficamos com

$$\begin{bmatrix} (M - \mathcal{E}) & (p_1 - \mu s E_2) - is(p_2 + \mu s E_1) \\ (p_1 - \mu s E_2) + is(p_2 + \mu s E_1) & -(M + \mathcal{E}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Desacoplando a equação matricial acima, encontramos

$$[p_1 - isp_2 - i\mu E_1 - \mu s E_2] \psi_2 = (\mathcal{E} - M) \psi_1, \quad (3.23)$$

$$[p_1 + isp_2 + i\mu E_1 - \mu s E_2] \psi_1 = (\mathcal{E} + M) \psi_2. \quad (3.24)$$

Como usual, queremos escrever as equações (3.23) e (3.24) em coordenadas polares (ρ, φ) .

Para isso, substituímos

$$p_1 = \cos\varphi p_\rho - \sin\varphi p_\varphi, \quad (3.25)$$

$$p_2 = \sin\varphi p_\rho + \cos\varphi p_\varphi, \quad (3.26)$$

e

$$E_1 = \cos\varphi E_\rho - \sin\varphi E_\varphi, \quad (3.27)$$

$$E_2 = \sin\varphi E_\rho + \cos\varphi E_\varphi, \quad (3.28)$$

nas referidas equações. Além disso, usando a fórmula

$$\begin{aligned} e^{\pm i\varphi} &= \cos(s\varphi) \pm isen(s\varphi) \\ &= \cos\varphi \pm issen\varphi, \end{aligned} \quad (3.29)$$

obtemos

$$[p_\rho - isp_\varphi - i\mu E_\rho] \psi_2 = e^{+is\varphi} (\mathcal{E} - M) \psi_1, \quad (3.30)$$

$$[p_\rho + isp_\varphi + i\mu E_\rho] \psi_1 = e^{-is\varphi} (\mathcal{E} + M) \psi_2, \quad (3.31)$$

onde $E_\varphi = 0$, pois, em nossa análise a configuração de campos elétricos admitida depende apenas da variável ρ ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \left(\frac{2\lambda_1}{\rho} + \frac{\lambda_2\rho}{2} \right) \hat{\rho}. \quad (3.32)$$

Dessa forma, as equações (3.30) e (3.31) tornam-se

$$\left[-i \frac{\partial}{\partial \rho} - is \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{i \partial \varphi} - i \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right) \right] \psi_2 = e^{+is\varphi} (\mathcal{E} - M) \psi_1, \quad (3.33)$$

$$\left[-i \frac{\partial}{\partial \rho} + is \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{i \partial \varphi} + i \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right) \right] \psi_1 = e^{-is\varphi} (\mathcal{E} + M) \psi_2, \quad (3.34)$$

sendo $p_\rho = -i \frac{\partial}{\partial \rho}$, $p_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{i \partial \varphi}$, $\eta_1 = 2\mu\lambda_1$, $\eta_2 = \frac{\mu\lambda_2}{2}$. Usando o ansatz²

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_m f_m(\rho) e^{im\varphi} \\ \sum_m i g_m(\rho) e^{i(m+s)\varphi} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

onde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ é o número quântico momento angular - (3.33) e (3.34) fornecem duas equações de primeira ordem acopladas dadas por

$$\left[\frac{d}{d\rho} + \frac{sm + \eta_1 + 1}{\rho} + \eta_2 \rho \right] g_m(\rho) = (\mathcal{E} - M) f_m(\rho), \quad (3.36)$$

$$\left[-\frac{d}{d\rho} + \frac{sm + \eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right] f_m(\rho) = (\mathcal{E} + M) g_m(\rho). \quad (3.37)$$

Uma solução isolada para o problema pode ser obtida ao considerar a “partícula” em repouso, ou seja, $\mathcal{E} = \pm M$ (essas condições desacoplam as equações (3.36)-(3.37)). Este tipo de solução tem sido recentemente abordada no contexto da equação de Dirac em (1 + 1) dimensões, no intuito de encontrar soluções de estados ligados para férmions no background de um potencial de Cornell, consistindo de um acoplamento misto escalar-vetor-pseudoescalar [38]-[40].

3.3 Soluções Isoladas e o Problema de Aharonov-Casher

Afim de obtermos soluções isoladas, procuremos por soluções de estados ligados sujeitas a condição de normalização

$$\int_0^\infty (|f_m(\rho)|^2 + |g_m(\rho)|^2) \rho d\rho = 1, \quad (3.38)$$

e consideremos as condições $\mathcal{E} = \pm M$ indicadas acima.

²O fator i na segunda componente do espinor foi inserido para assegurar que a parte radial do mesmo seja manifestamente real.

3.3.1 Caso $E = M$ (Soluções para Partículas)

Neste caso, as equações (3.36) e (3.37) tornam-se

$$\left[\frac{d}{d\rho} + \frac{sm + \eta_1 + 1}{\rho} + \eta_2\rho \right] g_m(\rho) = 0, \quad (3.39)$$

$$\left[-\frac{d}{d\rho} + \frac{sm + \eta_1}{\rho} + \eta_2\rho \right] f_m(\rho) = 2Mg_m(\rho). \quad (3.40)$$

As soluções para $g_m(\rho)$ e $f_m(\rho)$ são dadas por

$$g_m(\rho) = c_2 \rho^{-(sm+\eta_1+1)} e^{-\frac{\eta_2}{2}\rho^2}, \quad (3.41)$$

$$f_m(\rho) = \rho^{sm+\eta_1} e^{\frac{\eta_2}{2}\rho^2} \times [c_1 + c_2 M (\eta_2)^{sm+\eta_1} \Gamma(-sm - \eta_1, \eta_2\rho^2)], \quad (3.42)$$

onde c_1 e c_2 são constantes, e $\Gamma(-sm - \eta_1, \eta_2\rho^2)$ é a função gama incompleta superior, obtida através da relação [41]

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt, \quad \Re(a) > 0. \quad (3.43)$$

Como $\eta_{1,2} \geq 0$, então $g_m(\rho)$ converge conforme $\rho \rightarrow 0$. Além disso, visto que $\Gamma(-sm - \eta_1, \eta_2\rho^2)$ sempre diverge, então $f_m(\rho)$ somente convergirá se $c_2 = 0$ e $\eta_2 < 0$. Assim, temos

$$\begin{bmatrix} f_m(\rho) \\ g_m(\rho) \end{bmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rho^{\eta_1+sm} e^{\frac{\eta_2}{2}\rho^2}, \quad \begin{cases} s = \pm 1, \\ \eta_1 \geq 0, \\ \eta_2 < 0, \\ \eta_1 + sm > -1, \\ c_2 = 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

que é uma solução de quadrado integrável.

3.3.2 Caso $E = -M$ (Soluções para Antipartículas)

Neste caso, as equações (3.36) e (3.37) fornecem

$$\left[\frac{d}{d\rho} + \frac{sm + \eta_1 + 1}{\rho} + \eta_2\rho \right] g_m(\rho) = -2Mf_m(\rho), \quad (3.45)$$

$$\left[-\frac{d}{d\rho} + \frac{sm + \eta_1}{\rho} + \eta_2\rho \right] f_m(\rho) = 0. \quad (3.46)$$

As soluções destas equações são

$$f_m(\rho) = c_1 \rho^{sm+\eta_1} e^{\frac{\eta_2}{2}\rho^2}, \quad (3.47)$$

$$g_m(\rho) = e^{-\frac{1}{2}\eta_2\rho^2} \rho^{-(sm+\eta_1+1)} \times [c_2 + c_1 M(-\eta_2)^{-(sm+\eta_1+1)} \Gamma[sm + \eta_1 + 1, -\eta_2\rho^2]]. \quad (3.48)$$

Analogamente ao caso $\mathcal{E} = M$, avaliando (3.47) e (3.48), vemos que as soluções de quadrado integrável são

$$\begin{bmatrix} f_m(\rho) \\ g_m(\rho) \end{bmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}\eta_2\rho^2} \rho^{-(sm+\eta_1+1)}, \quad \begin{cases} s = \pm 1, \\ \eta_1 \geq 0, \\ \eta_2 > 0, \\ \eta_1 + sm < 0, \\ c_1 = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Em suma, notamos que os resultados acima, equações (3.44) e (3.49) são soluções de quadrado integrável devido a função $e^{\pm\frac{\eta_2}{2}\rho^2}$ com $\eta_2 \leq 0$ predominar sobre os polinômios ρ^{m+sm} e $\rho^{-(sm+\eta_1+1)}$ para $\mathcal{E} = M$ e $\mathcal{E} = -M$, respectivamente. Desta forma, podemos concluir que a presença de λ_2 é necessária para a existência de estados ligados.

3.4 Equação de Segunda Ordem

Multiplicando a equação (3.17) por $[\sigma_1(p_1 - \mu s \check{E}_1) + s\sigma_2(p_2 - \mu s \check{E}_2) + \sigma_3 M + \mathcal{E}]$, e usando (3.18)-(3.19), encontramos

$$\begin{aligned} & [\sigma_1(p_1 - s\mu E_2) + s\sigma_2(p_2 - s\mu E_1)] [\sigma_1(p_1 - s\mu E_2) + s\sigma_2(p_2 - s\mu E_1)] \psi \\ & = (\mathcal{E}^2 - M^2) \psi, \end{aligned} \quad (3.50)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} & [(p_1 - s\mu E_2)(p_1 - s\mu E_2) + s\sigma_1\sigma_2(p_1 - s\mu E_2)(p_2 + s\mu E_1)] \psi \\ & + [s\sigma_2\sigma_1(p_2 + s\mu E_1)(p_1 - s\mu E_2) + (p_2 + s\mu E_1)(p_2 + s\mu E_1)] \psi \\ & = (\mathcal{E}^2 - M^2) \psi. \end{aligned} \quad (3.51)$$

O primeiro e quarto termos nos fornecem:

$$\begin{aligned} & [(p_1 - s\mu E_2)(p_1 - s\mu E_2) + (p_2 + s\mu E_1)(p_2 + s\mu E_1)] \psi \\ & = [p_1^2 + p_2^2 + 2s\mu(E_1 p_2 - E_2 p_1) + \mu^2(E_1^2 + E_2^2) - s\mu(p_1 E_2 - p_2 E_1)] \psi. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Lembrando que o rotacional de um campo \mathbf{V} arbitrário é dado por

$$\nabla \times \mathbf{V} = (\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2) \hat{x} + (\partial_3 V_1 - \partial_1 V_3) \hat{y} + (\partial_1 V_2 - \partial_2 V_1) \hat{z}, \quad (3.53)$$

a equação (3.52) torna-se

$$\begin{aligned} & [(p_1 - s\mu E_2)(p_1 - s\mu E_2) + (p_2 + s\mu E_1)(p_2 + s\mu E_1)] \psi \\ &= [p^2 + 2s\mu_z \hat{z} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})_z + \mu^2 E^2] \psi. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Observe que o quinto termo do lado direito da equação (3.52) não aparece em (3.54). Isso deve-se ao fato de $(\mathbf{p} \times \mathbf{E}) = 0$, pois, tratamos aqui de campos eletrostáticos, onde o rotacional dos mesmos sempre é nulo. A equação (3.54) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & [(p_1 - s\mu E_2)(p_1 - s\mu E_2) + (p_2 + s\mu E_1)(p_2 + s\mu E_1)] \psi \\ &= [p^2 + 2s(\mu \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{p} + \mu^2 E^2] \psi \\ &= [\mathbf{p} + s(\mu \times \mathbf{E})]^2 \psi, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $\mu = \mu_z \hat{z}$ (momento angular na direção z). Para o segundo e terceiro termos em (3.51), temos:

$$\begin{aligned} & [s\sigma_1\sigma_2(p_1 - s\mu E_2)(p_2 - s\mu E_1) + s\sigma_2\sigma_1(p_2 - s\mu E_1)(p_1 + s\mu E_2)] \psi \\ &= is\sigma_3(s\mu p_1 E_1 + s\mu p_2 E_2) \psi \\ &= i(-i)\mu\sigma_3(\partial_1 E_1 + \partial_2 E_2) \psi \\ &= \mu\sigma_3(\nabla \cdot \mathbf{E}). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Substituindo (3.55)-(3.56) em (3.51), encontramos

$$[\mathbf{p} + s(\mu \times \mathbf{E})]^2 \psi + \mu\sigma_z(\nabla \cdot \mathbf{E})\psi = (\mathcal{E}^2 - M^2) \psi. \quad (3.57)$$

Expandindo o termo quadrático³, obtemos

$$[p^2 + 2s\mu_z \hat{z} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})_z + \mu^2 E^2] \psi + \mu\sigma_z(\nabla \cdot \mathbf{E})\psi = (\mathcal{E}^2 - M^2)\psi, \quad (3.58)$$

ou ainda,

$$\left[-\nabla^2 + 2s\mu E_\rho \frac{\nabla \varphi}{i} + \mu^2 E^2 \right] \psi + \mu\sigma_z(\nabla \cdot \mathbf{E})\psi = (\mathcal{E}^2 - M^2)\psi. \quad (3.59)$$

³Usamos a forma (3.55) ao invés da (3.54), na equação (3.57), com o intuito de torna-lá mais compacta e elegante.

Sendo o divergente da classe de campos elétricos dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2\lambda_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} + \lambda_2, \quad (3.60)$$

encontramos

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2s \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right) \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right)^2 \right] \psi + \sigma_z \left[\eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} + 2\eta_2 \right] \psi = (\mathcal{E}^2 - M^2) \psi, \quad (3.61)$$

onde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ e $\nabla_\varphi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Neste estágio, é válido mencionar que a equação (3.61) é a forma quadrática correta da equação de Dirac com acoplamento não-mínimo, devido ao termo singular $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$ ser considerado.

Usando a decomposição (3.35), obtemos

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{m^2}{\rho^2} + 2s \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right) \frac{m}{\rho} + \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right)^2 \right] f_m(\rho) + \left[\eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} + 2\eta_2 \right] f_m(\rho) = (\mathcal{E}^2 - M^2) f_m(\rho), \quad (3.62)$$

ou ainda,

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{(m + s\eta_1)^2}{\rho^2} + \eta_2^2 \rho^2 + 2\eta_2 (\eta_1 + sm + 1) \right] f_m(\rho) + \eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} f_m(\rho) = (\mathcal{E}^2 - M^2) f_m(\rho). \quad (3.63)$$

Escrevendo (3.63) como uma equação de autovalor,

$$h f_m(\rho) = E f_m(\rho), \quad (3.64)$$

com autovalor $E = \mathcal{E}^2 - M^2 - 2\eta_2 (\eta_1 + sm + 1)$, onde

$$h = h_0 + \eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} \quad (3.65)$$

é o hamiltoniano da partícula, e

$$h_0 = -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{\nu^2}{\rho^2} + \eta_2^2 \rho^2 \quad (3.66)$$

é hamiltoniano sem a função δ , com

$$\nu = m + s\eta_1. \quad (3.67)$$

A equação para $g_m(\rho)$ é obtida de forma análoga. A partir de (3.35) e (3.61), temos

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{(m+s)^2}{\rho^2} + 2s \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right) \frac{(m+s)}{\rho} + \left(\frac{\eta_1}{\rho} + \eta_2 \rho \right)^2 \right] g_m(\rho) - \left[\eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} + 2\eta_2 \right] g_m(\rho) = (\mathcal{E}^2 - M^2) g_m(\rho), \quad (3.68)$$

ou ainda,

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{(m+s)^2 + 2s\eta_1(m+s) + \eta_1^2}{\rho^2} + \eta_2^2 \rho^2 + 2\eta_2(sm + \eta_1) \right] g_m(\rho) - \eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho} g_m(\rho) = (\mathcal{E}^2 - M^2) g_m(\rho) \quad (3.69)$$

que pode ser escrita no formato hamiltoniano,

$$\bar{h} g_m(\rho) = \bar{E} g_m(\rho), \quad (3.70)$$

com $\bar{E} = \mathcal{E}^2 - M^2 - 2\eta_2(sm + \eta_1)$, onde

$$\bar{h} = \bar{h}_0 - \eta_1 \frac{\delta(\rho)}{\rho}, \quad (3.71)$$

sendo

$$\bar{h}_0 = -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{\bar{\nu}^2}{\rho^2} + \eta_2^2 \rho^2, \quad (3.72)$$

e

$$\bar{\nu} = m + s(\eta_1 + 1). \quad (3.73)$$

A equação (3.61) governa a dinâmica do sistema. Deste modo, devemos considerar as soluções regulares e irregulares, uma vez que o último tipo também serão soluções físicas para o sistema considerado. Em outras palavras, desde que seja considerado os efeitos de spin da partícula, e devido a configuração de campo (3.32), o hamiltoniano conterà um termo de singularidade. Retornaremos a este problema na seção (3.6).

3.5 Movimento em um Anel de Raio Constante

Antes de resolvermos (3.61), um caso interessante que pode ser considerado aqui acontece quando assumimos a partícula descrevendo um movimento circular de raio $\rho = a = \text{const.}$ [31]. Embora esse sistema seja trivial, é importante considerar o movimento de elétrons em anéis AB em vários cenários físicos, como por exemplo, para determinar

o espectro de estado ligado de um anel Aharonov-Bohm (AB) em um isolante topológico bidimensional usando um modelo four-band de poço quântico HeTg [42], para analisar a dinâmica de partículas em anéis quânticos na presença de um defeito topológico [43], para estudar os níveis eletrônicos de energia de nano-anéis com impurezas e efeitos AB [44], para determinar a seção de choque de fotoionização [45] e para resolver estados de elétrons em um anel bidimensional como um modelo exatamente solúvel [46]. Neste caso, desprezando os termos de derivada com relação a ρ e o termo da delta ($\delta(\rho)/\rho$) em (3.61), obtemos

$$\left[-\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + 2s \left(\frac{\eta_1}{a} + \eta_2 a \right) \frac{1}{a} \frac{\partial}{i \partial \varphi} + \left(\frac{\eta_1}{a} + \eta_2 a \right)^2 \right] \psi = (\mathcal{E}^2 - M^2) \psi \quad (3.74)$$

ou ainda,

$$\left[\frac{1}{a} \frac{\partial}{i \partial \varphi} + s \left(\frac{\eta_1}{a} + \eta_2 a \right) \right]^2 \psi = (\mathcal{E}^2 - M^2) \psi. \quad (3.75)$$

De acordo com (3.35), para uma partícula executando um movimento circular de raio constante, podemos escrever

$$\psi = \begin{bmatrix} a_m \\ i b_m e^{i s \varphi} \end{bmatrix} e^{i m \varphi}. \quad (3.76)$$

Substituindo (3.76) em (3.75), obtemos as energias

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + \left[\frac{m}{a} + s \left(\frac{\eta_1}{a} + \eta_2 a \right) \right]^2}, \quad (3.77)$$

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + \left[\frac{m + s}{a} + s \left(\frac{\eta_1}{a} + \eta_2 a \right) \right]^2}. \quad (3.78)$$

Os perfis de energia da equação (3.77) estão mostrados na figura 3.1 para $s = 1$ e alguns valores de m . A figura 3.1 mostra claramente que ambos os níveis de energia de partícula e antipartículas são membros do espectro. Observe que para energia positiva (negativa) vemos que quanto menor for o número quântico menores (maiores) são as energias correspondentes, de modo que é plausível identificá-los como níveis de energia de partículas (antipartículas). Também, é notável que as energias de Dirac são simétricas sobre $\mathcal{E} = 0$ e visto que as energias positivas e negativas nunca se interceptam podemos ver que não existe um canal para criações espontâneas de partícula-antipartícula. Se $\eta_2 = 0$, obtemos os níveis de energia de uma partícula neutra com momento magnético μ em um

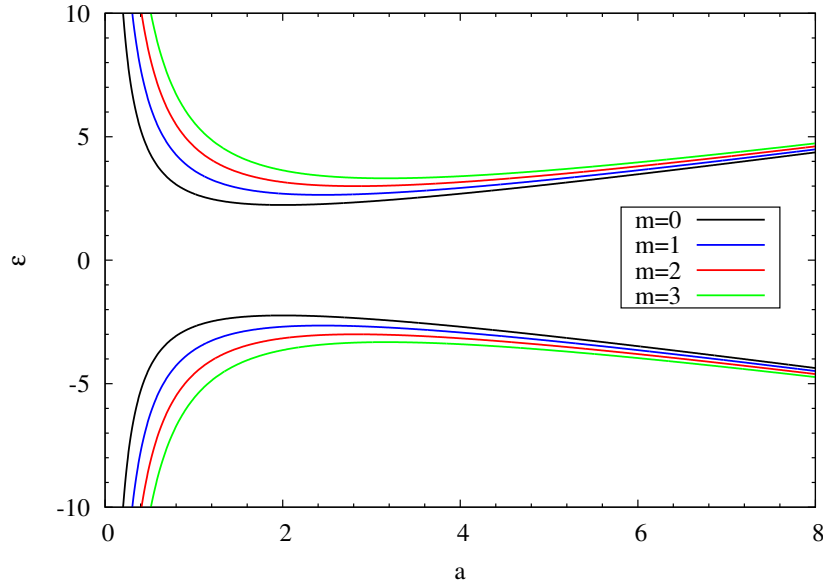


Figura 3.1: Gráfico da energia em função do raio para $s = 1$ e diferentes valores de m

caminho circular de raio constante,

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + \frac{1}{a^2} (m + s\eta_1)^2}, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + \frac{1}{a^2} (m + s + s\eta_1)^2}. \quad (3.80)$$

Estas energias correspondem ao espectro para efeito Aharonov-Casher usual.

3.6 Análise de Extensão Auto-adjunta e a Dinâmica Incluindo a Região $\rho = 0$

Nesta seção, determinaremos o espectro de energia relacionado as equações (3.64) e (3.70), incluindo o termo $\delta(\rho)/\rho$ na resolução. Afim de lidar com este tipo de potencial pontual de interação, fazemos uso da abordagem por extensão auto-adjunta [47, 48]. Em mecânica quântica, os operadores auto-adjuntos (simétricos) correspondem aos observáveis. Contudo, em alguns sistemas físicos, o hamiltoniano não é essencialmente auto-adjunto e uma tentativa para encontrar a extensão auto-adjunta do hamiltoniano corresponde a diferentes tipo de condições de contorno. Assim, as extensões auto-adjuntas são baseadas em condições de contorno na origem e no infinito [51, 53]. A partir da teoria de operadores simétricos, é um fato que o operador radial simétrico h_0 (como na equação (3.65)) é essencialmente auto-adjunto para $|\nu| \geq 1$, enquanto para $|\nu| < 1$ admite uma

família de parâmetros de extensão auto-adjunta [29], h_{0,λ_m} , onde λ_m é o parâmetro de extensão auto-adjunta. Aqui, usamos a abordagem da referência [47, 48], que é baseada sobre a condição de contorno na origem (A.11), onde através dela todas as extensões auto-adjuntas h_{0,λ_m} de h_0 são parametrizadas. Para $\rho \neq 0$, a equação para a componente $f_m(\rho)$

$$\left[-\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{\nu^2}{\rho^2} + \eta_2^2 \rho^2 \right] f_m(\rho) = E f_m(\rho) \quad (3.81)$$

pode ser transformada pela mudança de variável

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} = \eta_2 \rho &\implies \rho = \sqrt{\frac{\tilde{\rho}}{\eta_2}}, \\ \frac{d}{d\rho} &= 2\eta_2 \rho \frac{d}{d\tilde{\rho}}, \\ \frac{d^2}{d\rho^2} &= 2\eta_2 \frac{d}{d\tilde{\rho}} + 4\eta_2 \tilde{\rho} \frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Substituindo (3.82) em (3.81), temos

$$\left[-\left(2\eta_2 \frac{d}{d\tilde{\rho}} + 4\eta_2 \tilde{\rho} \frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(2\eta_2 \rho \frac{d}{d\tilde{\rho}} \right) + \frac{\eta_2 \nu^2}{\tilde{\rho}} + \eta_2^2 \left(\frac{\tilde{\rho}}{\eta_2} \right) - E \right] f_m(\tilde{\rho}) = 0. \quad (3.83)$$

Multiplicando por (-1) ,

$$\left[4\eta_2 \tilde{\rho} \frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2} + 4\eta_2 \frac{d}{d\tilde{\rho}} - \eta_2 \frac{\nu^2}{\tilde{\rho}} - \eta_2 \tilde{\rho} + E \right] f_m(\tilde{\rho}) = 0, \quad (3.84)$$

e dividindo por $4\eta_2$, encontramos

$$\left[\tilde{\rho} \frac{d^2}{d\tilde{\rho}^2} + \frac{d}{d\tilde{\rho}} - \left(\frac{\nu^2}{4\tilde{\rho}} + \frac{\tilde{\rho}}{4} - \frac{E}{4\eta_2} \right) \right] f_m(\tilde{\rho}) = 0. \quad (3.85)$$

Vamos analisar o limite assintótico da equação (3.85), na intenção de propormos uma solução que nos leve a uma equação diferencial mais simples. Quando $\tilde{\rho} \rightarrow \infty$, o primeiro e quarto termos são dominantes na equação (3.85). Dessa forma,

$$\frac{d^2 f_m(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}^2} = \frac{1}{4} f_m(\tilde{\rho}) \quad (3.86)$$

que tem como solução

$$f_m(\tilde{\rho}) = C_1 e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}}. \quad (3.87)$$

Para $\tilde{\rho} \rightarrow 0$, o primeiro e terceiro termos são dominantes. Daí,

$$\frac{d^2 f_m(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}^2} = \frac{\nu^2}{4\tilde{\rho}^2} f_m(\tilde{\rho}) \quad (3.88)$$

cuja solução é dada por

$$f_m(\tilde{\rho}) = C_2 \tilde{\rho}^{\frac{|\nu|}{2}}. \quad (3.89)$$

A condição de contorno (A.11) nos permite analisar soluções regulares e irregulares para (3.85). A partir do comportamento assintótico (3.87) e (3.89) encontramos a solução

$$f_m(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^{\pm \frac{|\nu|}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F(\tilde{\rho}), \quad (3.90)$$

onde (+) refere-se a solução regular e (-) a solução irregular, respectivamente. Substituindo (3.90) em (3.85), obtemos

$$\begin{aligned} 4 \tilde{\rho}^{1+1/2\nu} \frac{d^2 F}{d\tilde{\rho}^2} + 4 \tilde{\rho}^{1/2\nu} \frac{dF}{d\tilde{\rho}} + 4\nu \tilde{\rho}^{1/2\nu} \frac{dF}{d\tilde{\rho}} - 4 \tilde{\rho}^{1+1/2\nu} \frac{dF}{d\tilde{\rho}} \\ - 2\nu \tilde{\rho}^{1/2\nu} F - 2 \tilde{\rho}^{1/2\nu} F + \frac{E}{\eta_2} \tilde{\rho}^{1/2\nu} F = 0. \end{aligned} \quad (3.91)$$

Dividindo por $4\tilde{\rho}^{1/2\nu}$, encontramos

$$\tilde{\rho} \frac{d^2 F}{d\tilde{\rho}^2} + (1 + \nu - \tilde{\rho}) \frac{dF}{d\tilde{\rho}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} - \frac{E}{4\eta_2} \right) F = 0, \quad (3.92)$$

ou ainda,

$$\tilde{\rho} \frac{d^2 F(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}^2} + (1 \pm |\nu| - \tilde{\rho}) \frac{dF(\tilde{\rho})}{d\tilde{\rho}} - \left(\frac{1 \pm |\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2} \right) F(\tilde{\rho}) = 0. \quad (3.93)$$

A Equação (3.93) é do tipo hipergeométrica confluyente

$$zF''(z) + (b - z)F'(z) - aF(z) = 0. \quad (3.94)$$

Desta maneira, a solução geral para a equação (3.85) é dada por

$$\begin{aligned} f_m(\tilde{\rho}) = a_m \tilde{\rho}^{\frac{|\nu|}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F\left(\frac{1 + |\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2}, 1 + |\nu|, \tilde{\rho}\right) \\ + b_m \tilde{\rho}^{-\frac{|\nu|}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F\left(\frac{1 - |\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2}, 1 - |\nu|, \tilde{\rho}\right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Na expressão (3.95), $F(a, b, z)$ é uma função hipergeométrica confluyente de primeiro tipo [41], onde a_m and b_m são os coeficientes das soluções regulares e irregulares, respectivamente.

Agora, vamos aplicar a condição de contorno (A.11), que escrita de maneira explícita fica

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{|\nu|} f_m(\rho) = \lambda_m \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\rho^{|\nu|}} \left[f_m(\rho) - \left(\lim_{\rho' \rightarrow 0^+} \rho'^{|\nu|} f_m(\rho') \right) \frac{1}{\rho^{|\nu|}} \right]. \quad (3.96)$$

Substituindo (3.95) em (3.96), encontramos

$$\lambda_m (\eta_2)^{|\nu|} = \frac{b_m}{a_m} \left[1 + \frac{\lambda_m E}{4(1-|\nu|)} \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{2-2|\nu|} \right]. \quad (3.97)$$

Vemos que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{2-2|\nu|}$ diverge quando $|\nu| \geq 1$. Esta condição implica que b_m deve ser zero se $|\nu| \geq 1$ e somente a solução regular contribui para $f_m(\rho)$. Para $|\nu| < 1$, quando o operador H_0 não é auto-adjunto, passa a existir uma contribuição da solução irregular para $f_m(\rho)$.

Para (3.95) ser uma função de onda de estado ligado, ela deverá se anular para grandes valores de ρ (ser normalizável). Usando a representação assintótica para $z \rightarrow \infty$,

$$F(a, b, z) \approx \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^z z^{a-b}, \quad (3.98)$$

e a condição de normalização, encontramos

$$\frac{b_m}{a_m} = -\frac{\Gamma(1+|\nu|) \Gamma(\frac{1-|\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2})}{\Gamma(1-|\nu|) \Gamma(\frac{1+|\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2})}. \quad (3.99)$$

A partir de (3.97), para $|\nu| < 1$, temos

$$\frac{b_m}{a_m} = \lambda_m (\eta_2)^{|\nu|}. \quad (3.100)$$

Assim, a equação (3.99) torna-se

$$\frac{\Gamma(\frac{1+|\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2})}{\Gamma(\frac{1-|\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2})} = -\frac{1}{\lambda_m (\eta_2)^{|\nu|}} \frac{\Gamma(1+|\nu|)}{\Gamma(1-|\nu|)}. \quad (3.101)$$

A equação (3.101) dá a contribuição da solução irregular para o problema. Este recurso vem a partir do fato que o operador H_0 não ser auto-adjunto para $|\nu| < 1$.

Agora analisamos os seguintes pontos na equação (3.101):

(i) Para $\lambda_m = 0$, caso em que a função δ está ausente, somente a solução regular contribui para a função de onda de estado ligado.

(ii) Para $\lambda_m = \infty$, somente a solução irregular contribui para a função de onda de estado ligado.

Desta forma, para todos os outros valores do parâmetro de extensão auto-adjunta, ambas as soluções regular e irregular contribui para a função de onda de estado ligado. Analisando os pólos da função gama na equação (3.101) junto com o critérios (i) e (ii), temos

$$\frac{1+|\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2} = -n, \text{ para, } \lambda_m = 0, \quad (3.102)$$

$$\frac{1-|\nu|}{2} - \frac{E}{4\eta_2} = -n, \text{ para, } \lambda_m = \infty, \quad (3.103)$$

com n um inteiro não negativo, $n = 0, 1, 2, \dots$. Isolando E , e substituindo pelo seu valor, temos

$$4\eta_2 \left(n + \frac{1 \pm |\nu|}{2} \right) = \mathcal{E}^2 - M^2 - 2\eta_2 (\eta_1 + sm + 1), \quad (3.104)$$

ou ainda,

$$\mathcal{E}^2 - M^2 = 2\eta_2 [(2n + 1 \pm |m + s\eta_1|) + (\eta_1 + sm + 1)]. \quad (3.105)$$

Isolando \mathcal{E} , encontramos, respectivamente, para a solução regular e irregular

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 + |m + s\eta_1|) + \eta_1 + sm + 1]}, \quad (3.106)$$

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 - |m + s\eta_1|) + \eta_1 + sm + 1]}. \quad (3.107)$$

Como uma ilustração dos perfis de energia como uma função de λ_1 e com parâmetro de projeção de spin $s = 1$ e $s = -1$ são mostrados nas figuras 3.2 e 3.3, respectivamente. Mais uma vez, notamos que tanto partículas como antipartículas são membros dos níveis de energia do espectro. Também, é notado que em ambas as figuras as energias de Dirac são simétricas sobre $\mathcal{E} = 0$ e, uma vez que as energias positivas e negativas nunca se interceptam, vemos que não existe um canal para criação espontânea de partícula-antipartícula. Neste caso, a partir da exigência de energias reais (a partir da equação (3.106)) obtemos uma limitação para o valor mínimo de λ_1 . O parâmetro λ_1 satisfaz a seguinte inequação:

$$|m + 2\mu s \lambda_1| + 2\mu \lambda_1 \geq - \left[\frac{M^2}{\mu \lambda_2} + 2n + 2 + sm \right]. \quad (3.108)$$

A funções de onda de estado ligado não-normalizada são dadas por

$$f_m(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^{\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F(-n, 1 + \nu, \tilde{\rho}) + \tilde{\rho}^{-\frac{\nu}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F(-n, 1 - \nu, \tilde{\rho}). \quad (3.109)$$

Observe que quando $|\nu| \geq 1$ ou equivalentemente quando a interação δ está ausente, somente a solução regular contribui para a função de onda de estado ligado ($b_m = 0$), e a energia é dada pela (3.106).

Agora, consideremos a solução da equação (3.70). Ao realizar os mesmos passos para alcançar as equações (3.106)-(3.107), obtemos

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 + |m + s + s\eta_1|) + sm + \eta_1]}, \quad (3.110)$$

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 - |m + s + s\eta_1|) + sm + \eta_1]}, \quad (3.111)$$

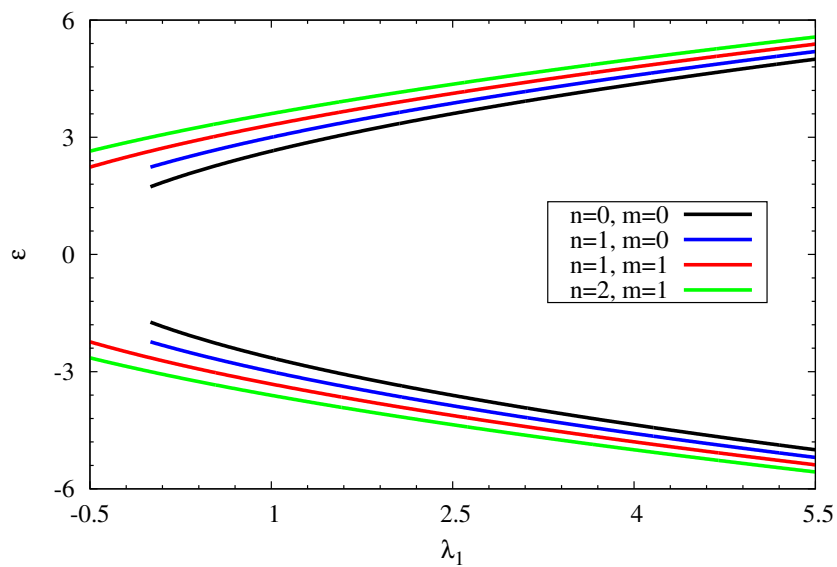


Figura 3.2: Gráfico da energia em função de λ_1 para $s = 1$ e diferentes valores de n e m .

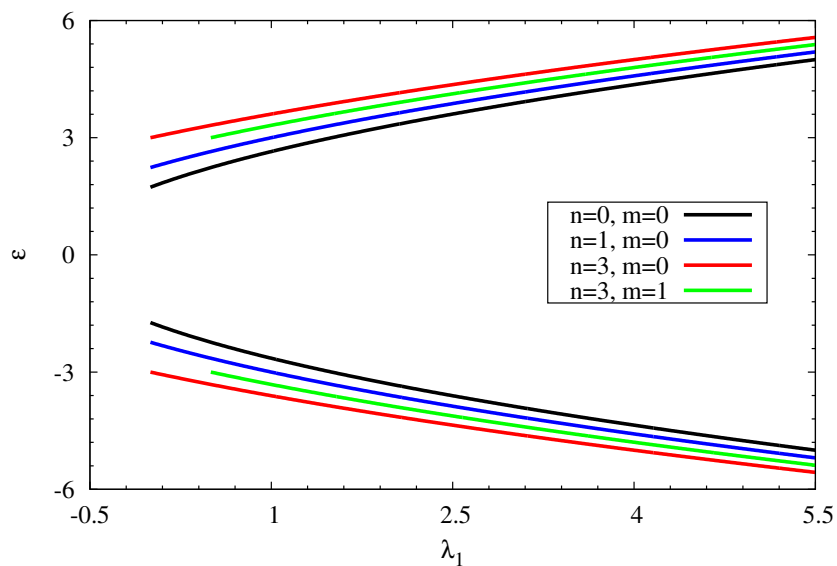


Figura 3.3: Gráfico da energia em função de λ_1 para $s = -1$ e diferentes valores de n e m .

com a função de onda de estado ligado não-normalizada dada por

$$g_m(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^{\frac{|\bar{\nu}|}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F(-\bar{n}, 1 + |\bar{\nu}|, \tilde{\rho}) + \tilde{\rho}^{-\frac{|\bar{\nu}|}{2}} e^{-\frac{\tilde{\rho}}{2}} F(-\bar{n}, 1 - |\bar{\nu}|, \tilde{\rho}), \quad (3.112)$$

onde

$$\bar{n} = \frac{1 \pm |\bar{\nu}|}{2} - \frac{\bar{E}}{4\eta_2}. \quad (3.113)$$

Se $\eta_1 \rightarrow 0$ nas equações (3.106)-(3.107) e (3.110)-(3.111), resulta

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 + |m|) + sm + 1]}, \quad (3.114)$$

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 - |m|) + sm + 1]}, \quad (3.115)$$

e

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 + |m + s|) + sm - 1]}, \quad (3.116)$$

$$\mathcal{E} = \pm \sqrt{M^2 + 2\eta_2 [(2n + 1 - |m + s|) + sm - 1]}. \quad (3.117)$$

Estes níveis de energia correspondem ao análogo da quantização de Landau para a dinâmica quântica relativística de férmions neutro de spin-1/2 com momento magnético μ na configuração de campo da equação (3.32).

3.7 Limite Não Relativístico

Uma outra questão que vale a pena ser analisada é o limite não relativístico da equação (3.57). Neste limite, devemos impor que $\mathcal{E} = M + \varepsilon$, com $\varepsilon \ll M$. Neste caso, a componente ψ_1 (grande componente) de ψ obedece à equação não relativística e a componente ψ_2 (pequena componente) de ψ é desprezada [32]. Portanto, a equação a ser resolvida inclui apenas a componente superior de (3.35), isto é,

$$\frac{1}{2M} [\mathbf{p} + s(\mu \times \mathbf{E})]^2 \psi_1 + \frac{1}{2M} \mu(\nabla \cdot \mathbf{E}) \psi_1 = \varepsilon \psi_1. \quad (3.118)$$

A equação (3.118) pode ser resolvida usando o mesmo procedimento utilizado para o caso relativístico. Os níveis de energia neste caso são dados por

$$\varepsilon = \begin{cases} \omega [(2n + 1 + |m + s\eta_1|) + \eta_1 + sm + 1], \\ \omega [(2n + 1 - |m + s\eta_1|) + \eta_1 + sm + 1], \end{cases} \quad (3.119)$$

onde definimos a frequência $\omega = \eta_2/M$. Podemos notar que, se $\eta_1 \rightarrow 0$, obtemos os correspondentes níveis de energia para um férmion neutro de spin-1/2 com momento magnético no regime relativístico

$$\varepsilon = \begin{cases} \omega [(2n + 1 + |m|) - sm + 1], \\ \omega [(2n + 1 - |m|) - sm + 1], \end{cases} \quad (3.120)$$

A equação (3.120) pode ser comparada, por exemplo, com a equação (25) da referência [50], na ausência do elemento de spin s . Vale salientar que a equação (3.106)-(3.107) fornece (3.119), ao tomarmos o limite não relativístico.

Capítulo 4

Conclusões e Perspectivas

Após uma revisão bibliográfica, constatamos que a equação de Klein-Gordon foi a primeira tentativa de dispositivo para descrição de partículas quânticas relativística a surgir, e que a mesma falhou por não fornecer uma densidade de probabilidade definida positiva. Porém, foi de suma importância como incentivo para o surgimento da equação de Dirac. A equação de Dirac teve que satisfazer três condições básicas para ser aceita como dispositivo para descrição de partículas de spin-1/2, são elas: garantir a relação energia momento correta, fornecer uma densidade de probabilidade definida positiva e ser covariante por transformações de Lorentz. Ainda sobre a equação de Dirac, vimos que a mesma possui uma simetria global, porém, é necessário a adoção de um termo de acoplamento eletromagnético para a manutenção de sua invariância por transformação local. Ao levarmos em conta a interação de partícula neutra com campo eletromagnético via momento de dipolo magnético, nos deparamos com a equação de Dirac com acoplamento não mínimo, e mostramos que ela obedece a transformação de paridade, inversão temporal e conjugação da carga.

No capítulo de resultados, partimos da equação de Dirac com acoplamento não mínimo e encontramos sua forma planar com a utilização da representação de Pauli das matrizes de Dirac. Após isso, resolvemos a dinâmica quântica de um férmion neutro com um momento magnético μ na presença de campos elétricos externos. Mostramos que o conjunto de equações diferenciais de primeira ordem admite soluções isoladas $E = M$ e $E = -M$. Este resultado implica em uma nova solução para o problema AC. Derivamos a equação de Dirac de segunda ordem para o estudo do movimento da partícula em duas situações. Primeiro, assumimos que a partícula descreve um caminho circular de

raio constante, e então analisamos a dinâmica no espaço completo, incluindo a região $\rho = 0$. A inclusão dessa região nos obriga a considerar na equação (3.57), o termo singular $\nabla \cdot \mathbf{E}_1$ (resulta em uma função δ). Através do método de extensão auto-adjunta mostramos que esse termo tem implicação física sobre a dinâmica da partícula. Em outras palavras, verificamos que o mesmo contribui para a função de onda de estado ligado e para o espectro de energia, e estes possuem uma dependência explícita sobre o parâmetro projeção de spin s . Para $\lambda_m = 0$, caso em que a função δ é ausente, somente a solução regular contribui para a função de onda de estado ligado. Para as soluções regular e irregular ($\lambda_m = \infty$), definidas pelos dois valores particulares do parâmetro de extensão auto-adjunta, as energias são dadas explicitamente nas equações (3.106)-(3.107) e (3.110)-(3.111). No limite $\eta_1 \rightarrow 0$, os níveis de energia correspondente são análogos aos níveis de Landau. Neste limite, a dependência do espectro com respeito ao parâmetro s ainda é mantida. Também obtivemos estes últimos resultados para o limite não relativístico, onde apenas o espectro de energia gerado pela componente superior do espinor é considerado.

Como perspectivas para futuros trabalhos, podemos mencionar a possibilidade de abrangi esses resultados para a mecânica quântica não-comutativa, com a dinâmica da partícula no espaço não-comutativo e no espaço de fase não-comutativo. Também podemos considerar uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico ao invés de dipolo magnético. Além disso, há a possibilidade de investigarmos a influência de geometrias de defeitos topológicos. Por último, podemos estudar materiais relacionados ao grafeno, e que são descritos pela equação de Dirac.

O estudo do grafeno (material bidimensional) e seus análogos através da equação de Dirac, torna-se possível devido aos portadores de cargas nestes materiais, os férmions de Dirac sem massa, terem uma dispersão de energia semelhante as partículas relativísticas sem massa. Além disso, devido a existência de duas sub-redes equivalentes no grafeno, os portadores de cargas podem ser descritos por funções de ondas de duas componentes, onde cada uma delas está relacionada a uma das sub-redes. Portanto, a dinâmica nestes materiais pode ser analisada por uma equação de Dirac planar sem o termo de massa, e com a velocidade da luz, c , substituída pela velocidade de Fermi, v_F [54].

Apêndice A

Método de Extensão Auto-adjunta

Em mecânica quântica, um operador é observável quando ele é hermitiano. Um operador A hermitiano, $A = A^\dagger$ (A^\dagger é o adjunto de A), com domínio $D(A)$ é dito auto-adjunto se $D(A) = D(A^\dagger)$. Para funções suaves $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ (diferenciável em todos os graus) com $\xi(0) = 0$, devemos ter

$$H\xi = H_0\xi. \quad (\text{A.1})$$

Consideremos o hamiltonianos dado por

$$H = H_0 + \eta \frac{\delta(\rho)}{\rho}, \quad (\text{A.2})$$

onde

$$H_0 = -\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{j^2}{\rho^2} + \alpha^2 \rho^2, \quad (\text{A.3})$$

sendo α e j constantes. É razoável interpretar (A.2) como uma extensão auto-adjunta de [51, 52, 53]

$$H_0|_{C_0^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})}. \quad (\text{A.4})$$

Afim de prosseguir com a extensão auto-adjunta de (A.3), decompomos o espaço de Hilbert $\mathfrak{H} = L^2(\mathbb{R}^2)$ com respeito ao momento angular $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\rho \otimes \mathfrak{H}_\varphi$, onde $\mathfrak{H}_\rho = L^2(\mathbb{R}^+, \rho d\rho)$ e $\mathfrak{H}_\varphi = L^2(S^1, d\varphi)$, com S^1 denotando a esfera unitária em \mathbb{R}^2 . O operador $-\partial_\varphi^2$ é essencialmente auto-adjunto em $\mathfrak{H}_\varphi = L^2(S^1, d\varphi)$, e obtemos H_0 em cada setor do momento angular. Usando o operador unitário

$$V : L^2(\mathbb{R}^+, \rho d\rho) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^+, d\rho), \quad (\text{A.5})$$

dado por

$$(V\xi)(\rho) = \rho^{1/2}\xi(\rho), \quad (\text{A.6})$$

o operador radial simétrico H_0 , tornasse

$$\tilde{H}_0 = VH_0V^{-1} = -\frac{d^2}{d\rho^2} + \left(j^2 - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{\rho^2} + \alpha^2\rho^2 \quad (\text{A.7})$$

que é essencialmente auto-adjunto para $|j| \geq 1$, enquanto para $|j| < 1$ admite uma família de parâmetros de extensão auto-adjunta [29]. Seguindo em frente com a extensão auto-adjunta de H_0 , devemos encontrar seus subespaços de deficiência, N_{\pm} , que são dados por

$$\begin{aligned} N_+ &= \left\{ \xi \in D(H_0^\dagger), H_0^\dagger \xi = z_+ \xi, \text{Im} z_+ > 0 \right\}, \\ N_- &= \left\{ \xi \in D(H_0^\dagger), H_0^\dagger \xi = z_- \xi, \text{Im} z_- < 0 \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

com dimensões n_+ e n_- , respectivamente, que são chamados de índices de deficiência de H_0 . Uma condição necessária e suficiente para H_0 ser auto-adjunto é que $n_+ = n_- = 0$. De outra maneira, se $n_+ = n_- \geq 1$ então H_0 tem um número infinito de extensões auto-adjuntas parametrizadas pela matriz unitária $n \times n$, onde $n = n_+ = n_-$. De acordo com a teoria de Neumann-Krein de extensões auto-adjuntas, o domínio de H_0^\dagger é dado por

$$D(H_0^\dagger) = D(H_0) \oplus N_+ \oplus N_-. \quad (\text{A.9})$$

A abordagem por extensão auto-adjunta basicamente consiste em estender o domínio de $D(H_0)$ afim de corresponder $D(H_0^\dagger)$, tornando H_0 um operador auto-adjunto. De acordo com (A.9), podemos observar que se H_0 for hermitiano, os domínios de $D(H_0)$ e $D(H_0^\dagger)$ ainda seriam diferentes. Portanto,

$$D(H_{\epsilon,0}) = D(H_0^\dagger) = D(H_0) \oplus N_+ \oplus N_-, \quad (\text{A.10})$$

onde $H_{\lambda_m,0}$ representa a extensão auto-adjunta de H_0 parametrizada por $\lambda_m \in [0, 2\pi)$.

Para caracterizar a família de parâmetros de extensão auto-adjunta de H_0 , usaremos a abordagem das referências [47, 48], que é baseada em uma condição de contorno na origem. Portanto, todas as extensões auto-adjuntas h_{0,λ_m} de h_0 são parametrizadas por uma condição de contorno na origem

$$\varkappa_0 = \lambda_m \varkappa_1, \quad (\text{A.11})$$

com

$$\varkappa_0 = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \rho^{|j|} f_m(\rho), \quad (\text{A.12})$$

$$\varkappa_1 = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{1}{\rho^{|j|}} \left[f_m(\rho) - \varkappa_0 \frac{1}{\rho^{|j|}} \right]. \quad (\text{A.13})$$

Para $\lambda_m = 0$, temos o hamiltoniano livre, sem a função δ , com função de onda regular na origem; para $\lambda_m \neq 0$, a condição de contorno na equação (A.11) permite uma singularidade $\rho^{-|j|}$ na função de onda na origem. Ou seja, neste tipo de abordagem, a condição de contorno é um limite matemático que permite soluções divergentes para o hamiltoniano (A.3) em pontos isolados, desde que estas sejam de quadrado integrável.

Referências Bibliográficas

- [1] PESHKIN, M., LIPKIN, H. J., **Topology, Locality, and Aharonov-Bohm Effect with Neutrons** . Phys. Rev. Lett. vol. 74, no. 15, pp. 2847-2850, 1995.
- [2] AHARONOV, Y., BOHM, D., **Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory**. Phys. Rev. vol. 115, no. 3, pp. 485-591, 1959.
- [3] AHARONOV, Y., CASHER, A., **Topological Quantum Effects for Neutral Particles**. Phys. Rev. Lett. vol. 53, no. 4, pp. 319-321, 1984.
- [4] AHARONOV, Y., ANANDAN, J., **Phase Change During a Cyclic Quantum Evolution** . Phys. Rev. Lett. vol. 58, no. 16, pp. 1593-1596, 1987.
- [5] AHARONOV, Y., ANANDAN, J., **Geometry of Quantum Evolution**. Phys. Rev. Lett. vol. 65, no. 14, pp. 1697-1700, 1990.
- [6] HE, X.-G., McKELLARB, B. H. J., **Topological Phase Due to Electric Dipole Moment and Magnetic Monopole Interaction**. Phys. Rev. A. vol. 47, no. 4, 3424-3425, 1993.
- [7] WILKENS, M., **Quantum Phase of a Moving Dipole**. Phys. Rev. Lett. vol. 72, no. 1, pp. 5-8, 1994.
- [8] WEI, H., HAN, R., WEI, X., **Quantum Phase of Induced Dipoles Moving in a Magnetic Field**. Phys. Rev. Lett. vol. 75, no. 11, pp. 2071-2073, 1995.
- [9] ANANDAN, J., **Classical and Quantum Interaction of the Dipole**. Phys. Rev. Lett. vol. 85, no. 7, pp. 1354-1357, 2000.
- [10] HAGEN, C.R., **Aharonov-Bohm Scattering of Particles with Spin**. vol. 64, no 5, pp. 503-506, 1990.

- [11] HAGEN, C.R., **Exact Equivalence of Spin-1/2 Aharonov-Bohm and Aharonov-Casher Effects.** Phys. Rev. Lett. vol. 64, no. 20, pp. 2347-2349, 1990.
- [12] SILVA, E.O. et al., **On Aharonov-Casher Bound States.** Eur. Phys. J. C. vol. 73, 2013.
- [13] SHIKAKHWA, M.S., AL-QAQ, E., **The $\nabla \cdot \mathbf{E}$ Term does not Change the Aharonov-Casher Scattering Cross Section.** J. Phys. A. vol. 43, 354008, 2010.
- [14] SILVA, E.O., ANDRADE, F. M., **Remarks on the Aharonov-Casher dynamics in a CPT-odd Lorentz-violating Background.** EPL. vol. 101, 51005, 2013.
- [15] KHALILOV, V., **Effect of Vacuum Polarization of Charged Massive Fermions in an Aharonov-Bohm Field.** Eur. Phys. J. C vol. 74, 2014.
- [16] PARK, D.K., OH, J.G., **Self-adjoint Extension Approach to the Spin-1/2 Aharonov-Bohm-Coulomb Problem.** Phys. Rev. D. vol. 50, no. 12, pp. 7715-7720, 1994.
- [17] SILVA, E.O., **On Planar Quantum Dynamics of a Magnetic Dipole Moment in the Presence of Electric and Magnetic Fields.** Eur. Phys. J. C. vol. 74, 2014.
- [18] KHALILOV, V., **Bound States of Massive Fermions in Aharonov-Bohm-like Fields.** Eur. Phys. J. C vol. 73, 2013.
- [19] KHALILOV, V., **Fermion Bound States in the Aharonov-Bohm Field in $2 + 1$ Dimensions.** Theoret. Math. Phys. vol. 163, pp. 511-516, 2010.
- [20] ANDRADE, F. M., SILVA, E.O., **Effects of Quantum Deformation on the Spin-1/2 Aharonov-Bohm Problem.** Phys. Lett. B. vol. 719, pp. 467-471, 2013.
- [21] ANDRADE, F. M., SILVA, E.O., PEREIRA, M., **Physical Regularization for the Spin-1/2 Aharonov-Bohm Problem in Conical Space.** Phys. Rev. D. vol. 85, 041701(R), 2012.
- [22] ANDRADE, F. M., SILVA, E.O., PEREIRA, M., **On the Spin-1/2 Aharonov-Bohm Problem in Conical Space: Bound States, Scattering and Helicity Nonconservation.** Ann. Phys. vol. 339, pp. 510-530, 2013.

- [23] GERBERT, P. S., JACKIW, R., **Classical and Quantum Scattering on a Spinning Cone**. *Comm. Math. Phys.* vol. 124, pp. 229-260, 1989.
- [24] GERBERT, P. S., **Fermions in an Aharonov-Bohm Field and Cosmic Strings**. *Phys. Rev. D.* vol. 40, no. 4, pp. 1346-1349, 1989.
- [25] ANDRADE, F.M. et al., **On Aharonov-Casher Scattering in a CPT-odd Lorentz-violating Background**. *J. Phys. G.* vol. 40, 075007, 2013.
- [26] ERICSSON, M., SJÖQVIST, E., **Towards a Quantum Hall Effect for Atoms Using Electric Fields**. *Phys. Rev. A.* vol. 65, 013607, 2001.
- [27] BAKKE, K., FURTADO, C., **Relativistic Landau Quantization for a Neutral Particle**. *Phys. Rev. A.* vol. 80, 032106, 2009.
- [28] BAKKE, K. et al., **Landau Quantization for a Neutral Particle in the Presence of Topological Defects**. *Phys. Rev. D.* vol. 79, 024008, 2009.
- [29] REED, M., SIMON, B., **Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis, Self-Adjointness**. Academic Press, New York - London, 1975.
- [30] KAY, B.S., STUDER, U.M., **Boundary Conditions for Quantum Mechanics on Cones and Fields Around Cosmic Strings**. *Comm. Math. Phys.* vol. 139, pp. 103-139, 1991.
- [31] GRIFFITHS, D., **Introduction to Quantum Mechanics**. 2^a edição, Addison-Wesley, 2005.
- [32] GREINER, W., **Relativistic Quantum Mechanics. Wave Equation**. 3^a edição, Springer, 2000.
- [33] RYDER, L., **Quantum Field Theory**. 2^a edição, Cambridge University Press, 1996.
- [34] GRIFFITHS, D., **Introduction to Elementary Particles**. 2^a edição, WILEY-VCH, 2008.
- [35] MANDL, F., SHAW, G., **Quantum Field Theory**. 2^a edição, WILEY, 2010.

- [36] ANANDAN, J., **Electromagnetic Effects in the Quantum Interference of Dipoles**. Phys. Lett. A. vol. 138, no 8, pp. 347-352, 1989.
- [37] PESKIN, M. **Quantum Field Theory**. 2^a edição, WILEY, 2010.
- [38] CASTRO, L. B., CASTRO, A. S., **Missing Solution in a Cornell Potential**. Ann. Phys. vol. 338, pp. 278-282, 2013.
- [39] CASTRO, L. B., CASTRO, A. S., **Relativistic Confinement of Neutral Fermions with a Trigonometric Tangent Potential**. J. of Phys. A: Math. Theor. vol. 40, no. 2, pp. 263-270, 2007.
- [40] CASTRO, A. S., HOTT, M., **Trapping Neutral Fermions with Kink-like Potentials**. Phys. Lett. A. vol. 351, no. 6, pp. 379-383, 2006.
- [41] ABRAMOWITZ, M., STEGUN., I. A., **Handbook of Mathematical Functions**. New York: Dover Publications, 1972.
- [42] MICHETTI, P., RECHER, P., **Bound States and Persistent Currents in Topological Insulator Rings**. Phys. Rev. B. vol. 83, 125420, 2011.
- [43] NETTO, A. S., CHESMAN, C., FURTADO, C., **Influence of Topology in a Quantum Ring**. Physics Letters A. vol. 372, pp. 3894-3897, 2008.
- [44] RAMÍREZ, S., **Electronic Energy Levels of Nanorings with Impurities and Aharonov-Bohm Effects**. Physica E. vol. 44, pp. 172-178, 2011.
- [45] XIE, W., **Photoionization Cross Section in a Two-dimensional Quantum Ring: Aharonov-Bohm Effect**. Superlattices and Microstructures. vol. 58, pp. 94-100, 2013.
- [46] TAN, W.-C., INKSON, J. C., **Electron States in a Two-dimensional Ring - an Exactly Soluble Model**. Semiconductor Science and Technology. Semicond. Sci. Technol. vol. 11, pp. 1635-1641, 1996.
- [47] ALBEVERIO, S. et al., **Solvable Models in Quantum Mechanics**. 2^a edição, AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2004.

- [48] BULLA, W., GESZTESY, F., **Deficiency Indices and Singular Boundary Conditions in Quantum Mechanics.** J. of Phys. vol. 26, no. 10, pp. 2520-2528, 1985.
- [49] ANDRADE, F. M., SILVA, E.O., **Effects of Spin on the Dynamics of the 2D Dirac Oscillator in the Magnetic Cosmic String Background.** Eur. Phys. J. C. vol 74, 2014.
- [50] RIBEIRO, L. et al., **Landau Analog Levels for Dipoles in Non-commutative Space and Phase Space.** Eur. Phys. J. C. vol. 56, 2008.
- [51] DABROWSKI, P., STOVICEK, P., **Aharonov-Bohm Effect with δ -type Interaction** J. Math. Phys. vol. 39, no. 1, pp. 47-62, 19
- [52] ADAMI, R., TETA, A., **On the Aharonov-Bohm Hamiltonian.** Lett. Math. Phys. vol. 43, pp. 43-54, 1998.
- [53] ALBEVERIO, R. et al., **Point Interactions in two Dimensions: Basic Properties, Approximations and Applications to Solid State Physics.** J. Reine Angew. Math. vol 380, pp. 87-107, 1987.
- [54] RAZA, H., **Graphene Nanoelectronics: Metrology, Synthesis, Properties and Applications.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.