



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A DINÂMICA QUÂNTICA DE UMA PARTÍCULA NEUTRA EM
UM MEIO QUE VIOLA A SIMETRIA DE LORENTZ

José Arcênio dos Santos Lourenço

CAMPINA GRANDE

- Março 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA
DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

A DINÂMICA QUÂNTICA DE UMA PARTÍCULA NEUTRA EM
UM MEIO QUE VIOLA A SIMETRIA DE LORENTZ

José Arcênio dos Santos Lourenço

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física de Partículas e Campos.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

CAMPINA GRANDE

- Março 2015 -

A DINÂMICA QUÂNTICA DE UMA PARTÍCULA NEUTRA EM
UM MEIO QUE VIOLA A SIMETRIA DE LORENTZ

JOSÉ ARCÊNIO DOS SANTOS LOURENÇO

Aprovada em _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos
Orientador

Prof. Dr. Lincoln Ribeiro Filho
Co-orientador

Prof. Dr. Marcos Antônio Anacleto
Examinador Interno

Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos
Examinador Interno

Prof. Dr. Knut Bakke Filho
Examinador Externo, DF-UFPB

À minha família.

Agradecimentos

À todos da minha família que sempre me incentivam a crescer e ser melhor. Em especial aos meus pais José Lourenço e Cícera Sandra, que são exemplos de vida, amor e companherismo. À minha esposa Neydaiane Fernandes, por ser a minha companheira, o amor da minha vida e que em nenhum momento desisti dos nossos sonhos. Às minhas irmãs Alexsandra, Kelly e Vera pelos incentivos e ajuda nos momentos difíceis. Às minhas avós Vera e Maria, pelo carinho e dedicação à toda a nossa família. Aos tios e primos que sempre confiaram e acreditaram em meu potencial. Ao meu sogro Antônio e minha sogra Estelita, pelo carinho e confiança. E aos meus amigos que apesar da distância sempre me deram a mão. E aos meus filhotes Nego e Branquinha, por trazer felicidade ao meu lar.

Ao professor Eduardo Passos, pela orientação e paciência e por todo o conhecimento que obtive na realização deste trabalho. E ao professor Lincoln Ribeiro, pela ótima co-orientação, com explicações esclarecedoras, ajudando muito para na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos do departamento de pós graduação em Física da UFCG. E aos professores deste departamento por transmitirem seus conhecimentos através das disciplinas.

À CAPES pelo suporte financeiro.

“ Viver é enfrentar um problema atrás do outro. O modo como você o encara é que faz a diferença.”

Benjamin Franklin

Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas influências da Física não-convencional, tal como a quebra da simetria de Lorentz sobre os efeitos da mecânica quântica. Analisamos a dinâmica quântica de uma partícula neutra e de spin- $\frac{1}{2}$ que se movimenta em um meio que viola a simetria de Lorentz. Este sistema é mapeado por um acoplamento não-mínimo de CPT-ímpar entre bósons e férmions. No limite não-relativístico, estudamos as fases geométricas associada a este modelo sobre a influência do parâmetro que controla a quebra da simetria de Lorentz. Assim, usamos as fórmulas destas fases geométricas para impor limites experimentais para intensidade de tal meio. Além disso, estudamos uma analogia dos níveis de Landau e da condutividade Hall relacionados a sistemas de baixas energias.

Palavras-chave: violação da simetria de Lorentz, limite não-relativístico, efeitos quânticos em sistemas de energias baixas.

Abstract

In this work, we study some influences of unconventional physics, such as the effects of the Lorentz-symmetry violation, on quantum mechanical effects. We analyse the quantum dynamics of a neutral spin- $\frac{1}{2}$ particle that moves in a Lorentz-symmetry violating background. This system is mapped by a CPT-odd non-minimal coupling between bosons and fermions. In the non-relativistic limit, we study the geometric phase for this model by taking in to account the influence of the parameter in which controls the Lorentz symmetry. Thus, we use the formule this geometric phases to impose a experimental limits to magnitude on such background. In addition, we obtained a analogy with the Landau levels and the quantum Hall conductivity related to low energy systems.

Keywords: Lorentz symmetry violation, non-relativistic limits, quantum effects at low energy systems.

Lista de Figuras

3.1	Esquema idealizado da experiência proposta por Aharonov-Bohm.	9
3.2	Momento de dipolo elétrico \vec{d} propaga-se em um campo magnético radial criado por uma linha de monopolos magnéticos q_m , e um momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ (entre parênteses), circundando uma linha de cargas elétricas q_e	13

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	v
1 Introdução	1
2 A equação de Dirac modificada	4
2.1 A equação de movimento	4
2.2 O limite não-relativístico	5
3 A violação da simetria de Lorentz: fases geométricas	8
3.0.1 O efeito Aharonov-Bohm	9
3.0.2 O efeito Aharonov-Casher	10
3.0.3 O efeito He-McKellar-Wilkens	12
3.1 Fases geométricas devido a violação da simetria de Lorentz	14
3.1.1 Análogos dos efeitos Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkens	14
3.1.2 Limites Experimentais	15
4 A violação da Simetria de Lorentz: níveis de Landau	18
4.1 O problema de Landau	19
4.2 Analogia dos níveis de Landau via dipolo magnético	20
4.3 Analogia dos níveis de Landau via a violação da simetria de Lorentz	22
4.3.1 Caso Tipo-Espaço	22

4.3.2	Caso Tipo-Tempo	26
5	A violação da simetria de Lorentz: o efeito Hall	29
5.1	Introdução ao efeito Hall	29
5.2	O efeito Hall via a violação da simetria de Lorentz	31
5.2.1	A condutividade Hall: primeiro caso	31
5.2.2	A condutividade Hall: segundo caso	33
6	Conclusão e Perspectivas	35

Capítulo 1

Introdução

O estudo da dinâmica de uma partícula é um assunto amplamente explorado na literatura tanto no contexto clássico quanto no quântico. No contexto clássico, destacam-se as propriedades dos efeitos relativísticos da dinâmica de uma partícula sob a ação do campo eletromagnético [1, 2, 3]. No contexto quântico, apontamos os efeitos associados a dinâmica de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$, neutra ou carregada sob a ação de agentes externos, tais como campo eletromagnético e quando a partícula possui momento de dipolo elétrico, magnético ou ambos. A principal proposta deste trabalho é o de estudar em detalhes, alguns efeitos quânticos do movimento uma partícula neutra sob a ação de um meio externo composto por campos eletromagnéticos e um campo constante que viola a simetria de Lorentz. Esse ambiente é denominado de meio anisotrópico.

A simetria de Lorentz é composta por dois grupos de transformações: rotações e boosts. Tal simetria desempenha uma regra fundamental na estrutura do Modelo Padrão da física das partículas fundamentais (simetria de calibre: $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$). Sua consistência, tem sido amplamente testada e confirmada por diversos aparatos experimentais [4]. Contudo, devido ao desenvolvimento de experimentos de alta precisão e de altas energias, já admite-se que tal simetria não seja uma simetria exata em todas as escalas de energias, principalmente, a níveis de energias próximos a escala de energia de Planck. Como já é de conhecimento, teorias tais como a Teoria de Cordas e da Gravidade Quântica admitem por construção a ausência da simetria de Lorentz em sua estrutura. No entanto, no contexto de escalas de energias mais baixas do que a de Planck, a violação da simetria de Lorentz pode ser abordada por teorias efetivas. Em razão de que o Modelo Padrão não

possui dinâmica suficiente para violar de forma espontânea a simetria de Lorentz, assim, D. Colladay e A. Kostelecky, propuseram uma teoria efetiva conhecida como Extensão do Modelo Padrão (SME) [5].

A SME é uma estrutura natural que rever vários problemas de sistemas físicos pela adição de termos que quebram explicitamente a simetria de Lorentz em todos os setores dos campos usuais do Modelo Padrão. Tais termos efetivos, aparecem como valores esperados do vácuo de tensores definidos em escalas altamente energéticas. A SME é uma construção teórica que tem inspirado uma gama de investigações nos últimos anos. Tais trabalhos envolvem diversos aspectos: investigações de efeitos birrefringentes [6, 7], sistemas de férmions e correções radiativas à temperatura zero [8] e à finita [9], experimentos que sondam a validade da simetria de CPT [10]. Recentemente, alguns estudos que envolvem operadores de altas dimensões têm atraído grande interesse na área da quebra de simetria de Lorentz[11]. Na prática, essas tantas contribuições têm elucidados efeitos que violam a simetria de Lorentz como mecanismos de estimativa de certos limites experimentais para os parâmetros que controlam a quebra de simetria de Lorentz. Neste trabalho pretendemos explorar a quebra da simetria de Lorentz introduzida como um acoplamento não-mínimo entre os setores dos campos de calibre e fermiônico.

Há algum tempo atrás, um acoplamento não-mínimo que viola a simetria de Lorentz foi proposto na forma: $\tilde{D}_\mu = \partial_\mu + iA_\mu + ign^\lambda \tilde{F}_{\lambda\mu}$ no contexto da equação de Dirac, $(i\gamma^\mu \tilde{D}_\mu - m)\psi = 0$ [12]. Neste caso, o campo espinorial é ψ enquanto que a modificação na derivada covariante representa um adaptação da ação efetiva de Carrol, Field e Jackiw com $n_\mu = (n_0, n_i)$ sendo um campo constante que controla a quebra da simetria de Lorentz [6], $\tilde{F}_{\mu\nu}$ é o tensor dual do tensor intensidade de campo eletromagnético e g é uma constante que mede a intensidade do acoplamento não-mínimo. As análises do limite não-relativístico revelam que esta teoria pode oferecer analogias com momento magnético de uma partícula neutra, capaz de gerar uma fase tipo Aharonov-Casher para suas auto-funções [12]. Além disso, esse particular acoplamento tem o potencial de gerar fases topológicas em contexto mais geral [12, 13]. Os seus efeitos sobre o espectro do átomo de hidrogênio foi estudado em [14], enquanto que sua influência sobre o problema de Aharonov-Bohm-Casher foi analisado em [15]. Ainda neste contexto, alguns trabalhos aplicam tal acoplamento não-mínimo para calcular os níveis de Landau [16] e análogos do efeito Hall [17].

O objetivo principal dessa dissertação é o de explorar o conteúdo não-relativístico acoplamento não-mínimo apresentado acima, e rever suas diversas propriedades associadas aos estudos de fase topológicas, níveis de Landau e análogos do Efeito Hall. Assim, esperamos que tais estudos nos ofereçam mecanismos capazes de impor limites experimentais para o parâmetro que controla a quebra de simetria de Lorentz.

Adotando o sistema de unidades naturais, o qual considera-se $c = \hbar = 1$, este trabalho está organizado como segue: no Cap.2, apresentamos o modelo e obtemos o Hamiltoniano não-relativístico associado. No Cap.3, encontramos as fases geométricas adquiridas pelas funções de onda devido ao meio que viola a simetria de Lorentz e usamos este resultado para impor limites experimentais para os parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz. No Cap.4, obtemos níveis de energia análogos ao níveis de Landau para os seguintes casos: o 4-vetor n_μ tipo-tempo e tipo-espaço respectivamente. No Cap.5, calculamos a condutividade quântica análogas a do efeito Hall também para os casos em que n_μ é tipo-tempo e tipo-espaço respectivamente. Finalmente no Cap.6 apresentamos nossas conclusões e as perspectivas.

Capítulo 2

A equação de Dirac modificada

A teoria de Dirac fornece uma equação de onda relativística que descreve partículas de spin $\frac{1}{2}$, cujo seu regime não-relativístico refere-se à velocidades muito inferiores a da luz, levando a uma melhor interpretação quântica. Aqui, modificaremos essa teoria via a um certo acoplamento não-mínimo que nos oferece um novo sistema capaz de caracterizar o movimento de uma partícula de spin $\frac{1}{2}$ sob a influência de um meio que viola a simetria de Lorentz e, extrairemos o seu operador Hamiltoniano associado.

2.1 A equação de movimento

O sistema que estamos interessados é descrito pela seguinte equação de movimento:

$$(i\gamma_\mu\partial^\mu - g\gamma_\mu n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu} - m)\psi = 0, \quad (2.1)$$

onde o segundo termo da Eq.(2.1) é exatamente a mencionada modificação do SME. Sabendo-se que $\tilde{F}^{0i} = -B^i$, $\tilde{F}^{i0} = B^i$, $\tilde{F}^{ij} = \epsilon_{ijk}E^k$, temos que a contribuição dependente da quebra da simetria de Lorentz pode ser decomposta como,

$$g\gamma_\mu n_\alpha \tilde{F}^{\alpha\mu} \rightarrow gn_0(\vec{\gamma} \cdot \vec{B}) + g(\vec{n} \cdot \vec{B})\gamma_0 - g\vec{\gamma} \cdot (\vec{n} \times \vec{E}) \quad (2.2)$$

onde n_0 e \vec{n} são as componentes tipo-tempo e tipo-espaco do 4-vetor n_μ respectivamente. Note que a matriz γ_0 é Hermitiana e a matriz $\vec{\gamma}$ é anti-Hermitiana, e estão relacionadas com a matriz $\hat{\beta}$ e a matriz $\vec{\alpha}$ através de $\gamma^0 = \hat{\beta}$ e $\vec{\gamma} = \hat{\beta}\vec{\alpha}$. Aqui, escolhemos as matrizes de Dirac na seguinte representação:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} = \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\alpha} = \hat{\beta}\vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{2.3}$$

onde, 1 e 0 são matrizes 2×2 conhecidas como matriz unitária e matriz nula respectivamente, e σ^j com $j = 1, 2, 3$ são as matrizes de Pauli.

2.2 O limite não-relativístico

Após a apresentação do modelo, pretendemos aqui conhecer o seu conteúdo não-relativístico (o Hamiltoniano associado). Existem basicamente duas técnicas de se obter o Hamiltoniano não-relativístico associado a uma determinada equação de movimento relativística. A primeira é conhecida como a aproximação $1/c$ com c sendo a velocidade da luz [2] e a outra é o método de Foldy-Wouthuysen (FW) [1]. Por questões de conveniência, lançaremos mão da técnica de FW.

Iniciando o processo, recrevemos a Eq.(2.1) na forma decomposta:

$$(i\partial_0 + i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - gn_0(\vec{\alpha} \cdot \vec{B}) - g(\vec{n} \cdot \vec{B}) + g\vec{\alpha}(\vec{n} \times \vec{E}) - \hat{\beta}m)\psi = 0.\tag{2.4}$$

Note que este sistema pode descrever uma partícula neutra de spin $\frac{1}{2}$ movendo-se sob a influência de um meio que quebra a simetria de Lorentz. A equação (2.4) pode ser reescrita como equação de auto-valores:

$$i\partial_0\psi = \hat{H}\psi\tag{2.5}$$

onde a quantidade \hat{H} é dada como

$$\hat{H} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + g(\vec{n} \cdot \vec{B}) + \hat{\beta}m\tag{2.6}$$

onde definimos $\vec{\pi} = -i(\vec{\nabla} + \hat{\beta}(ig(\vec{n} \times \vec{E}) - n_0\vec{B}))$

Neste ponto, o propósito é encontrar uma aproximação não-relativística da teoria. Para tanto, rescrevemos a Eq.(2.6) seguinte da forma:

$$\hat{H} = \hat{\mathcal{O}} + \hat{\mathcal{E}} + \hat{\beta}m,\tag{2.7}$$

onde, $\hat{\mathcal{O}} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi}$ e $\hat{\mathcal{E}} = g(\vec{n} \cdot \vec{B})$, que são os termos ímpar e par, obedecendo as relações $\hat{\mathcal{E}}\hat{\beta} = \hat{\beta}\hat{\mathcal{E}}$ e $\hat{\mathcal{O}}\hat{\beta} = -\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}$. A intensão é fazer a parte ímpar zerar, ou minimizá-la o máximo possível. Assim é introduzida a seguinte transformação,

$$\hat{\mathcal{H}}' = e^{i\hat{S}}(\hat{\mathcal{H}} - i\partial_0)e^{-i\hat{S}}, \quad (2.8)$$

com, \hat{S} sendo uma matriz Hermitiana, dada por

$$\hat{S} = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}, \quad (2.9)$$

obtemos,

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{\mathcal{H}} + i[\hat{S}, \hat{\mathcal{H}}] - \frac{1}{2}[\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\mathcal{H}}]] - \frac{i}{6}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\mathcal{H}}]]] + \frac{1}{24}[\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{\beta}m]]] + \dots \quad (2.10)$$

Assim, a transformação Foldy-Wouthuysen de primeira ordem fica:

$$\hat{\mathcal{H}}' = \hat{\beta}m + \hat{\mathcal{E}}' + \hat{\mathcal{O}}', \quad (2.11)$$

onde, $\hat{\mathcal{O}}'$ é da ordem de $\frac{1}{2m}$. Para calcular a transformação de segunda ordem, usa-se $\hat{S}' = -\frac{i}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}'$, então se tem:

$$\hat{\mathcal{H}}'' = \hat{\beta} + \hat{\mathcal{E}}' + \hat{\mathcal{O}}'', \quad (2.12)$$

onde, $\hat{\mathcal{O}}''$ é da ordem de $\frac{1}{m^2}$. Fazendo $\hat{S}'' = -\frac{1}{2m}\hat{\beta}\hat{\mathcal{O}}''$ para a terceira aproximação, com isto, a parte ímpar da expansão (2.10) é anulada. Então, é encontrada a seguinte expressão:

$$\hat{\mathcal{H}}''' \cong \hat{\beta} \left(m + \frac{1}{2m}\hat{\mathcal{O}}^2 - \frac{1}{8m^3}\hat{\mathcal{O}}^4 \right) + \hat{\mathcal{E}} - \frac{1}{8m^2}[\hat{\mathcal{O}}, [\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{E}}]]. \quad (2.13)$$

Para o nosso propósito, devemos considerar apenas a aproximação não-relativística em até $\frac{1}{m}$ da Eq.(2.13). Portanto, substituindo os valores de $\hat{\mathcal{O}}$ e $\hat{\mathcal{E}}$ na Eq.(2.13) em de acordo com a identidade: $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi})^2 = \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} - i\vec{\Sigma} \cdot (\vec{\pi} \times \vec{\pi})$, obtem-se a seguinte Hamiltoniana não-relativística,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} \approx & \hat{\beta} \left[m - \frac{1}{2m}(\vec{\nabla} + ign_0\vec{B} - ig(\vec{n} \times \vec{E}))^2 - \frac{g}{2m}n_0\vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \right. \\ & \left. \frac{g}{2m}\vec{\Sigma} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{E})] \right] + g(\vec{n} \cdot \vec{B}). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Esta Hamiltoniana não-relativística descreve o movimento de férmions de quatro componentes, no entanto para várias aplicações na mecânica quântica não-relativística de baixas

energias, considera-se *spinors* de duas componentes, logo a Hamiltoniana para férmions de duas componentes é escrita da seguinte forma:

$$\hat{\mathcal{H}} \approx -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} + ign_0\vec{B} - ig(\vec{n} \times \vec{E}))^2 - \frac{g}{2m}n_0\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \frac{g}{2m}\vec{\sigma} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{E})] + g(\vec{n} \cdot \vec{B}). \quad (2.15)$$

Note que a Hamiltoniana (2.15) pode ser analisada através de duas situações. A primeira é quando o parâmetro que controla a quebra da simetria de Lorentz é tipo-espaço, isto é, $n_0 = 0$:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\vec{n}} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} - ig(\vec{n} \times \vec{E}))^2 + \frac{g}{2m}\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{E}) + g(\vec{n} \cdot \vec{B}) \quad (2.16)$$

e, quando temos o caso tipo-tempo, como $\vec{n} = 0$:

$$\hat{\mathcal{H}}_{n_0} = -\frac{1}{2m}(\vec{\nabla} + ign_0\vec{B})^2 - \frac{g}{2m}n_0\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}). \quad (2.17)$$

Assim, as Eqs.(2.16) e (2.17) representam as Hamiltonias não-relativísticas da equação de Dirac na presença de um acoplamento não-mínimo que insere a quebra de simetria de Lorentz. A seguir, devemos considerar cada caso, e desenvolver alguns estudos que analisam certos efeitos da Mecânica Quântica tais como fases geométricas, níveis de Landau e efeito Hall.

Capítulo 3

A violação da simetria de Lorentz: fases geométricas

Na Física Clássica, efeitos físicos são gerados exclusivamente por forças. Não existem efeitos mensuráveis em regiões do espaço onde não existem campos. Classicamente, os potenciais relacionados aos campos são apenas artifícios matemáticos que facilitam os cálculos, não possuindo significado físico. Em Física Quântica, existe a possibilidade de medirem-se efeitos físicos na ausência de forças, em regiões do espaço permeadas por potenciais. Assim, em Física Quântica, surgem algumas discussões, como a redefinição do significado dos potenciais, e da natureza topológica ou geométrica de tais efeitos quânticos. Esses efeitos ganharam destaque com o trabalho de Aharonov e Bohm [18], no qual demonstraram que uma partícula carregada pode adquirir uma fase em sua função de onda mesmo movendo-se na ausência de campos. Aharonov e Casher [19], mostraram que uma partícula neutra polarizada magnéticamente em um meio livres de forças externas, adquire uma fase geométrica em sua função de onda, e Cimmino *et al* em [20], utilizando um interferômetro de neutrons verificaram o efeito Aharonov-Casher experimentalmente. He e Mckellar [21], e posteriormente Wilkens [22], propuseram uma fase geométrica ao circundar um partícula neutra em torno de uma linha de monoplos magnéticos. Já Wei *et al* [23], propôs um arranjo teórico para um experimento, de modo não levarem em conta a existência de monopólos magnéticos.

3.0.1 O efeito Aharonov-Bohm

No estudo de fases geométricas Aharonov e Bohm [18], demonstraram que uma partícula carregada ao circular uma linha de fluxo magnética, é adicionada uma fase quântica em sua função de onda. Como ilustração, considere dois feixes de elétrons saindo da região de fonte para a região de interferência, atravessando um anteparo com duas fendas percorrendo os caminhos C_1 e C_2 . De acordo com a figura:

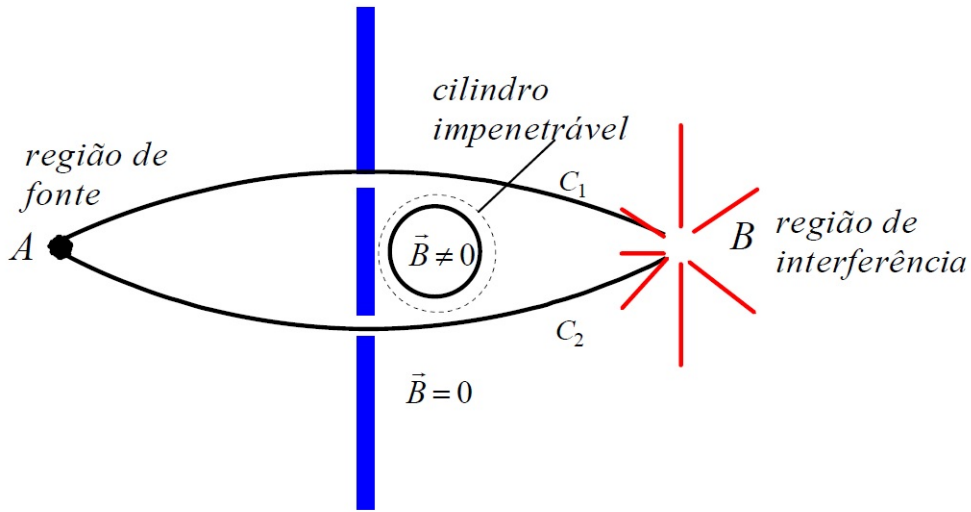


Figura 3.1: Esquema idealizado da experiência proposta por Aharonov-Bohm.

Entre as fendas, foi colocado um cilindro impenetrável, com um campo magnético $\vec{B} \neq 0$ em seu interior, a interferência ocorre devido a difração dos feixes de elétrons que atravessa o anteparo das duas fendas. Porém, com o campo magnético nulo na região da trajetória dos feixes de elétrons uma corrente estacionária no cilindro gera um fluxo magnético Φ_m dado pela expressão:

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{\ell}, \quad (3.1)$$

onde, c é qualquer circuito envolvendo o cilindro. Embora o campo de indução magnética \vec{B} seja nulo fora do cilindro, o potencial vetor \vec{A} que satisfaz a expressão acima, se mantém finito em algum lugar ao longo do circuito. Considere que a dinâmica de um elétron em um campo magnético é definido pela seguinte Hamiltoniano:

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2, \quad (3.2)$$

em regiões simplesmente conexas, que se trata de qualquer curva simples fechada contida em um espaço, pode ser reduzida a um ponto, assim permanecendo neste espaço. A solução da Hamiltoniana (3.2), pode ser escrita da forma:

$$\psi = \psi_0 e^{-iS}, \quad (3.3)$$

onde, $S = e \int \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$, quando o potencial vetor é nulo. E ψ_0 , é solução para a Hamiltoniana (3.2). Tendo em vista a região de campo magnético nulo ser um região multiplamente conexa, podemos usar a solução (3.3), pois a função de onda é descrita para os dois feixes, que por sua vez passam por uma região simplesmente conexa. Logo, definimos as seguintes soluções:

$$\psi_1 = \psi_1^0 e^{-iS_1}, \quad \psi_2 = \psi_2^0 e^{-iS_2}, \quad (3.4)$$

os valores de S_1 e S_2 , são dados ao longo da trajetória dos elétrons. Assim, a diferença de fase que observa-se na região de interferência é dada:

$$\Delta S = S_1 - S_2 = e \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = e\Phi_m. \quad (3.5)$$

Desta forma, quando o elétron circunda a região de fluxo magnético a sua função de onda obtém uma fase topológica, devido está em uma região não-simplesmente conexa e livres de forças externas.

3.0.2 O efeito Aharonov-Casher

O efeito Aharonov-Casher [19] foi surgerido em 1984, como proposta de efeito dual ao Aharanov-Bohm [18]. Para tanto, considere a Lagragiana de uma partícula carregada (L_{PC}) com carga elétrica e de massa m , movendo-se na presença de um campo magnético com velocidade \vec{v} dada por:

$$L_{PC} = \frac{m\vec{v}^2}{2} + e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{v}, \quad (3.6)$$

com \vec{r} sendo o vetor posição da carga elétrica e \vec{R} o vetor posição do momento de dipolo magnético. E a Lagrangiana para a partícula neutra (L_{PN}) de massa M com momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ movimentando-se com velocidade \vec{V} , através do campo elétrico gerado pela carga e é escrito por:

$$L_{PN} = \frac{M\vec{V}^2}{2} - e\varphi, \quad (3.7)$$

onde φ é o potencial elétrico correspondente a carga e . Podemos definir uma densidade de carga ρ criada pelo o movimento do dipolo magnético, dada pela seguinte expressão:

$$\rho = \vec{V} \cdot \vec{j} = \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}), \quad (3.8)$$

no qual, \vec{M} é a magnetização. Como podemos escrever a carga e em termos da densidade de carga ρ , através de uma integral de volume, reescrevemos a Lagrangiana (3.7) da forma:

$$L_{PN} = \frac{M\vec{V}^2}{2} - \int (\varphi \vec{V}) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}) d\tau, \quad (3.9)$$

Usando as propriedades $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ e $\nabla \cdot (\phi \vec{A}) = (\nabla \phi) \cdot \vec{A} + \phi(\nabla \cdot \vec{A})$, na integral acima, encontramos a seguinte Lagrangiana:

$$L_{PN} = \frac{M\vec{V}^2}{2} - \int \varphi \vec{M} \cdot \nabla \times \vec{V} d\tau - \int \vec{M} \cdot \vec{V} \times \vec{E}(\vec{r} - \vec{R}) d\tau + \int \nabla \cdot (\varphi \vec{V}) \times \vec{M} d\tau, \quad (3.10)$$

onde, usamos $\vec{E}(\vec{r} - \vec{R}) = -\nabla\varphi$, que é o campo produzido pela carga localizada em \vec{r} , com intensidade sentida em \vec{R} . Considerando o teorema da divergência, temos que a primeira e a terceira integral são nulas, e sabemos que $\vec{\mu} = \int \vec{M} d\tau$, temos

$$L_{PN} = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \vec{\mu} \times \vec{E}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{V}, \quad (3.11)$$

na eletrodinâmica, temos que o potencial vetor em \vec{r} gerado através do momento de dipolo μ em \vec{R} é dado por:

$$\vec{\mu} \times \vec{E}(\vec{r} - \vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\vec{\mu} \times (\vec{r} - \vec{R})}{|\vec{r} - \vec{R}|^3} = -e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}), \quad (3.12)$$

com isso, a Lagrangiana para a partícula neutra com momento de dipolo magnético (3.11) é escrita da seguinte forma:

$$L_{PN} = \frac{M\vec{V}^2}{2} - e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{V}, \quad (3.13)$$

assim, somando-se a expressão (3.6) da Lagrangiana para a partícula carregada com a Eq. (3.13), encontramos a Lagrangiana para uma partícula com carga e e outra neutra com momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$, que dá origem a um potencial vetor \vec{A} da seguinte forma:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{M\vec{V}^2}{2} + e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot (\vec{v} - \vec{V}), \quad (3.14)$$

agora, considere cargas estacionárias, isto nos levará a um efeito dual ao efeito Araronov-Bohm. Com isso, a Lagrangiana para o dipolo magnético μ em \vec{R} e uma partícula fixada na posição \vec{r} , ou seja com velocidade nula é dada por:

$$L = \frac{M\vec{V}^2}{2} + e\vec{A}(\vec{r} - \vec{R}) \cdot \vec{V}, \quad (3.15)$$

usando a expressão (3.12), reescrevendo o potencial vetor da equação anterior em termos do momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ e o campo elétrico $\vec{E}(\vec{r} - \vec{R})$, ficamos com:

$$L = \frac{M\vec{V}^2}{2} + \vec{\mu} \times \vec{E}(\vec{r} - \vec{R}), \quad (3.16)$$

dessa forma, podemos definir um Hamiltoniano via transformação de Legendre, dada por:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \vec{\mu} \times \vec{E} \right)^2, \quad (3.17)$$

onde $\vec{P} = \partial L / \partial \vec{V}$ é o momento canônico do dipolo magnético. Então, temos que o potencial vetor da partícula neutra para o efeito Aharonov-Casher é \vec{A}_{AC} . Assim, a fase Aharonov-Casher que a partícula adquire ao circular a linha carga elétrica perpendicular ao plano do movimento do dipolo é:

$$\phi_{AC} = -e \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \oint (\vec{\mu} \times \vec{E}) \cdot d\vec{l} = \mu\lambda, \quad (3.18)$$

onde λ é a densidade de carga linear e μ é a precessão do dipolo magnético através da linha de carga. Assim, concluímos que o efeito Aharonov-Casher, ocorre quando a partícula neutra move-se na região onde existe o campo elétrico produzido pela carga e , mesmo não resultando em força sobre a partícula. Este campo induz em outras interações ou flutuações no momento angular, desta forma, o efeito Aharonov-Casher pode ser explicado em termos de uma troca local de momentum angular entre o campo elétrico e a partícula.

3.0.3 O efeito He-McKellar-Wilkens

Desenvolvida por He e McKellar [21] e posteriormente Wilkens [22], a fase He-McKellar-Wilkens refere-se a existência de monopolos magnéticos através de uma linha de carga, no qual uma partícula neutra que possui momento de dipolo elétrico permanente ao circular esta linha de carga, adquire uma fase geométrica em sua função de onda. Tornando-se um efeito dual ao Aharonov-Casher, de acordo com a figura:

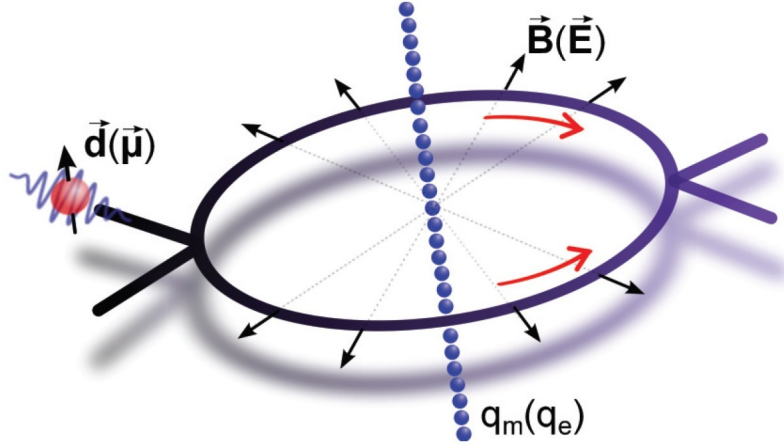


Figura 3.2: Momento de dipolo elétrico \vec{d} propaga-se em um campo magnético radial criado por uma linha de monopólos magnéticos q_m , e um momento de dipolo magnético $\vec{\mu}$ (entre parênteses), circundando uma linha de cargas elétricas q_e .

Considere a dinâmica de uma partícula neutra de massa m , com momento de dipolo elétrico \vec{d} que interage com um campo elétrico \vec{E}' , de acordo com a seguinte Lagrangiana:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \vec{d} \cdot \vec{E}', \quad (3.19)$$

onde \vec{v} é a velocidade da partícula neutra. Utilizando as transformações de Lorentz, o campo elétrico \vec{E}' é dado por:

$$\vec{E}' = \gamma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.20)$$

com γ sendo o fator de Lorentz e \vec{B} é o campo produzido pela a distribuição de carga, que no limite não-relativístico é aproximadamente igual a 1, assim podemos reescrever a Eq. (3.19) como segue:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \vec{d} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (3.21)$$

comparando com a Lagrangiana de um elétron movendo-se em um campo eletromagnético, verificamos que o termo $e^{-1}(\vec{d} \cdot \vec{E})$ corresponde ao potencial escalar e o termo $e^{-1}(\vec{d} \times \vec{B})$ é o potencial vetor efetivo, com o acréscimo da carga do elétron definiremos o potencial vetor de He-McKellar-Wilkens da seguinte forma:

$$\vec{A}_{HMW} = e^{-1}(\vec{d} \times \vec{B}), \quad (3.22)$$

Assim, a fase geométrica que a partícula neutra com momento de dipolo adquire é dada por:

$$\phi_{HMW} = e \oint \vec{A}_{HMW} \cdot d\vec{\ell} = \oint (\vec{d} \times \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = -\lambda_m d, \quad (3.23)$$

onde λ_m é a densidade de monopolos magnéticos. Como proposta experimental Wei *et al* [23] em 1995, estudaram a fase quântica da partícula neutra em uma região movendo-se onde os campos elétricos e magnéticos são uniformes e aplicados simultaneamente. Desta forma, a configuração dos campos resulta em um momento de dipolo elétrico $\vec{d} = \alpha(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{E})$ presente na partícula, conduzindo a uma fase da seguinte forma:

$$\phi = \oint (\vec{B} \times \alpha \vec{E}) \cdot d\vec{\ell}, \quad (3.24)$$

onde α é a polarização elétrica. E esta fase nos dá uma configuração de campos cruzados, tendo em vista ser uma proposta mais realista para a realização experimental.

3.1 Fases geométricas devido a violação da simetria de Lorentz

Após a uma breve revisão sobre fase topológicas, podemos identificar que a Hamiltoniana (2.16) é capaz de gerar uma fase análoga a fase responsável pelo efeito Aharonov-Casher e por sua vez, a Hamiltoniana (2.17) também pode gerar uma fase análoga a fase associada ao efeito He-McKellar-Wilkins, respectivamente. Devemos obter tais efeitos para impor certos limites experimentais para os parâmetros que controlam a quebra da simetria de Lorentz.

3.1.1 Análogos dos efeitos Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkins

Note que a Hamiltoniana (2.14), pode ser reescrita numa forma compacta:

$$\hat{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2m} \left(\vec{\nabla} - i\vec{a} \right)^2 + a_0, \quad (3.25)$$

onde as quantidades \vec{a} e a_0 são componentes de um certo quadro-potencial dependente dos campos elétricos e magnéticos associados as constantes que controlam a quebra da

simetria de Lorentz. Tais estruturas são escritas como

$$\vec{a} = g\vec{n} \times \vec{E} - gn_0\vec{B}, \quad (3.26)$$

e,

$$a_0 = \frac{g}{2m}\vec{\sigma} \cdot [\vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{E})] - \frac{g}{2m}n_0\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + g(\vec{n} \cdot \vec{B}). \quad (3.27)$$

Em outras palavras, a expressão (3.25) pode ser interpretada como uma Hamiltoniana que descreve a interação de uma partícula carregada minimamente acoplada com um campo de gauge Abelian e o potencial a_μ . Desta forma, temos que (3.26) refere-se ao potencial vetor e (3.27) ao potencial escalar.

A equação de Schrödinger para a equação (3.25) é dada por

$$-\frac{1}{2m} \left(\vec{\nabla} + ig\vec{n} \times \vec{E} - ign_0\vec{B} \right)^2 \Psi = \mathcal{E}\Psi, \quad (3.28)$$

a fase quântica é obtida através da variação da ação clássica,

$$\Delta S = S_1 - S_2 = i \oint \vec{a} \cdot d\vec{\ell} = \phi, \quad (3.29)$$

usando o potencial vetor em (3.26), logo a fase adquirida pela partícula é,

$$\phi = i \oint \left(g\vec{n} \times \vec{E} - gn_0\vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.30)$$

Agora, será analisado as influências do acoplamento não-mínimo g em consonância com os parâmetros \vec{n} e n_0 que violam da simetria de Lorentz, para os análogos as fases de Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkens.

Aharonov e Casher propuseram um efeito dual ao Aharonov-Bohm [18], no qual uma partícula neutra com momento de dipolo magnético ao circundar uma linha de carga elétrica adquirir uma fase geométrica em sua função de onda.

3.1.2 Limites Experimentais

Nesta seção é estudado o análogo a fase Aharonov-Casher procurando investigar o comportamento do acoplamento não mínimo g , sob influência dos parâmetros $\vec{n} \neq 0$ e $n_0 \neq 0$ que viola a simetria de Lorentz, para tanto considere o campo magnético $\vec{B} = 0$ e reescreve-se a fase da equação (3.30) da seguinte forma,

$$\phi = i \oint \left(g\vec{n} \times \vec{E} \right) \cdot d\vec{\ell}, \quad (3.31)$$

além disso, considere o parâmetro que viola a simetria de Lorentz $\vec{n} = n_3 \vec{k}$, onde \vec{k} é um vetor unitário na direção do eixo z. E paralelo ao eixo z a configuração de campo gerada por um fio homogeneamente carregado, é dada por

$$\vec{E} = \frac{\lambda_e}{2\pi r} \hat{e}_r, \quad (3.32)$$

onde λ_e é a densidade linear de carga do fio. Assim (3.31) é dado

$$\phi = i \oint \left(gn_3 \vec{k} \times \vec{E} \right) \cdot d\vec{\ell} = i (gn_3) \lambda_e, \quad (3.33)$$

este ângulo de fase é proporcional à intensidade do campo elétrico da seguinte forma,

$$i\phi = 2\pi r (gn_3) |\vec{E}|, \quad (3.34)$$

onde pode usá-la para impor um limite superior sobre a magnitude da componente tipo-espaço do parâmetro gn_3 que viola a simetria de Lorentz. Estabelecendo uma capacidade experimental para medir o ângulo de fase, a menos 10^{-4} rad que por sua vez, é a menor fase obtida experimentalmente por Cimmino *et al* [20] e Sangster *et al* [24], com isso

$$2\pi r (gn_3) |\vec{E}| < 10^{-4} \text{ rad}. \quad (3.35)$$

Será adotado um campo magnético da ordem de $|\vec{E}| = 10(eV)^2$ e o raio $r = 50(eV)^{-1}$ desenvolvido por [25], que são os valores usuais para anéis mesoscópicos de uma dimensão. Dessa forma, encontra-se o limite superior para a componente tipo-espaço do parâmetro que viola a simetria de Lorentz, da forma

$$gn_3 < 10^{-8} (eV)^{-1}. \quad (3.36)$$

Conclui-se que o parâmetro gn_3 controla a violação da simetria de Lorentz, modificando os efeitos da fase geométrica, e contribui para aumentar a magnitude do dipolo magnético induzindo a polarização da partícula.

A fase He-McKellar-Wilkens consiste na existência de monopolos magnéticos distribuídos em uma linha de carga, onde uma partícula neutra com momento de dipolo elétrico ao circular essa linha de carga, adquire uma fase geométrica em sua função de onda. Considere o campo elétrico $\vec{E} = 0$ para a expressão (3.30), logo

$$\phi = -i \oint gn_0 \vec{B} \cdot d\vec{\ell}. \quad (3.37)$$

Será analisado o análogo a fase He-McKellar-Wilkens, verificando o comportamento do acoplamento não-mínimo em meio a influência do parâmetro $n_0 \neq 0$, que viola a simetria de Lorentz. Definindo o campo magnético gerado por uma corrente elétrica estacionária da seguinte forma

$$\vec{B} = \frac{j}{2\pi r} \hat{e}_\phi, \quad (3.38)$$

onde, j é a densidade de corrente elétrica. Logo a fase (3.37) é dada

$$\phi = -i \oint gn_0 \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -i(gn_0)j, \quad (3.39)$$

este ângulo de fase é proporcional à intensidade do campo magnético, $\phi = 2\pi r(gn_0)|\vec{E}|$. Propondo uma possibilidade experimental para medir o ângulo de fase a menos de 10^{-4} rad, desta forma a fase tem de ser inferior a este valor, logo

$$2\pi r(gn_0)|\vec{B}| < 10^{-4} \text{ rad}, \quad (3.40)$$

Atribui-se uma intensidade de campo magnético $|\vec{B}| = 10^3 (eV)^2$ e o raio $r = 50 (eV)^{-1}$. Então, tem-se a capacidade de impor o limite superior para a componente tipo-tempo do parâmetro que viola a simetria de Lorentz, assim

$$gn_0 < 10^{-11} (eV)^{-1}. \quad (3.41)$$

Neste capítulo foi investigado a dinâmica quântica de uma partícula neutra na presença de campos magnéticos e elétricos externos com o parâmetro que viola a simetria de Lorentz, e foi demonstrado que este parâmetro contribui para alteração da fase geométrica. O efeito Aharonov-Casher neste modelo foi verificado, e demonstrou-se que a violação da simetria de Lorentz, coopera para aumentar o dipolo magnético da partícula. Já o efeito He-McKellar-Wilkens foi analisado neste mesmo contexto, e mostrou-se que a violação da simetria de Lorentz contribui para a corrente elétrica estacionária. Foram utilizadas as fases obtidas de Aharonov-Casher e He-McKellar-Wilkens para impor limites superiores sobre a magnitude das componentes tipo-espaco e tipo-tempo que violam a simetria de Lorentz. Os valores obtidos são de interesse teórico, devido a existência de restrições no termo gn_3 que viola Lorentz na eletrodinâmica, desta forma, estes parâmetros experimentais são muito difíceis de alcançar com a tecnologia atual. Além disso, as condições criadas são adequadas, a observação experimental se faz um desafio para distinguir o efeito de parâmetro que viola a simetria, daquelas associadas a dinâmica quântica de dipolos, na presença de campos eletromagnéticos externos.

Capítulo 4

A violação da Simetria de Lorentz: níveis de Landau

Talvez um dos problemas mais simples possíveis em mecânica quântica seja a dinâmica de uma partícula carregada em duas dimensões sob a influência de um campo magnético constante aplicado perpendicularmente ao plano do movimento. Esse sistema é descrito pelo problema de Landau. Em mecânica quântica, a quantização de Landau é a quantização das órbitas ciclotrônicas de partículas carregadas na presença de campos eletromagnéticos. Como resultado, as partículas carregadas podem ocupar apenas órbitas com valores discretos de energia, denominados níveis de Landau. Os níveis de Landau são degenerados, com o número de elétrons por nível diretamente proporcional a intensidade do campo magnético aplicado. O objetivo desse capítulo é a obtenção dos análogos aos níveis Landau para uma partícula neutra de spin $\frac{1}{2}$ na presença de um campo eletromagnético que leva a influência de um parâmetro constante que viola a simetria de Lorentz. Tendo em vista a extensão do modelo padrão, é adicionada na equação de Dirac um termo tipo Chern-Simons [6], onde esse termo envolve um plano de fundo que caracteriza a direção preferencial no espaço-tempo.

4.1 O problema de Landau

O problema de Landau foi proposto em 1930 [26], como solução da energia para uma partícula com carga q e massa m , movendo-se no plano x - y onde habita um campo magnético uniforme \vec{B} aplicado perpendicularmente ao plano do movimento da partícula. Considere a Hamiltoniana, dada por:

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2m} = \frac{(-i\nabla - q\vec{A})^2}{2m}, \quad (4.1)$$

onde \vec{A} corresponde ao potencial vetor, que pode ser definido através do campo magnético $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Encontraremos as energias associadas ao sistema identificando as relações de comutação não-nulas como segue:

$$[P_x, P_y] = im\omega, \quad (4.2)$$

no qual ω é a frequência ciclotrônica das órbitas clássicas da partícula carregada na presença do campo magnético, da seguinte forma:

$$\omega = \frac{q\vec{B}}{m} = \frac{\sigma|qB|}{m}, \quad (4.3)$$

onde $\sigma = \pm$, que rotula a direção de revolução referente ao movimento clássico. Tendo em vista, o comprimento natural no regime Hall ser o comprimento magnético $l = |qB|^{-1/2}$, assim escrevemos os seguintes operadores escada:

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2m|\omega|}} (P_x + i\sigma P_y), \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2m|\omega|}} (P_x - i\sigma P_y), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde obedece a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. Assim, reescrevemos a Hamiltoniana (4.1), como segue:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |\omega| + \frac{p_z^2}{2m}, \quad (4.5)$$

com isso, temos que o movimento no plano $x - y$, transformou-se em um oscilador harmônico unidimensional em consonância ao movimento livre na direção z . A energia é dada por:

$$E_{n,k_z} = \left(n + \frac{1}{2} \right) |\omega| + \frac{k_z^2}{2m} \quad (4.6)$$

com $n = 0, 1, 2, \dots$ e k_z possui um valor real. Dessa forma, nota-se que os autovalores são independentes tanto da direção de revolução quanto do centro das órbitas que correspondem ao movimento clássico.

4.2 Analogia dos níveis de Landau via dipolo magnético

Adote um sistema formado por uma partícula neutra com momento de dipolo magnético que está restrita no plano $x - y$, move-se na presença de um campo elétrico. Para obtermos uma quantização análoga aos níveis de Landau, considere a configuração de campo demonstradas por Ericsson e Sjöqvist em [27], onde o campo magnético é uniforme, o torque sobre a partícula é nulo e o campo elétrico estático, fornecendo $\partial_t \vec{E} = 0$ e $\nabla \times \vec{E} = 0$. Considere a Hamiltoniana do sistema da seguinte forma:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \mu \vec{n} \times \vec{E} \right)^2 + \frac{\mu}{2m} \nabla \cdot \vec{E}, \quad (4.7)$$

onde μ é o momento de dipolo magnético, que é orientado pelo vetor unitário \vec{n} , no qual $\vec{\mu} = \mu \vec{n}$. Observamos que a Hamiltoniana (4.7) possui uma analogia com a Hamiltoniana de um acoplamento mínimo de uma partícula carregada na presença de um campo magnético. Através disso, podemos definir um potencial vetor efetivo dada por:

$$\vec{A} = \vec{n} \times \vec{E}, \quad (4.8)$$

Com a escolha do calibre simétrico, o potencial vetor efetivo e o campo elétrico são definidos da seguinte forma:

$$\vec{A}_{eff} = \frac{\rho_e}{2} r \hat{e}_\phi \quad \text{e} \quad \vec{E} = \frac{\rho_e}{2} r \hat{e}_r, \quad (4.9)$$

onde ρ_e é a densidade volumétrica de cargas elétricas, e para o campo elétrico, adotamos $\vec{n} = \hat{e}_z$. Podemos definir também um campo magnético efetivo, dada por:

$$\vec{B}_{eff} = \nabla \times \vec{A} = \rho_e \hat{e}_z, \quad (4.10)$$

Agora, podemos escrever a equação de Schrödinger para o sistema em coordenadas cilíndricas, usando as configurações de campo em (4.8), como segue:

$$-\frac{1}{2m} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] - \frac{i\omega}{2} + \frac{m\omega^2}{8} r^2 \psi + \frac{\omega}{2} \psi = E\psi, \quad (4.11)$$

onde a frequência ciclotrônica é expressa por:

$$\omega = \sigma \omega_{eff} = \sigma \frac{|\mu \rho_e|}{m}, \quad (4.12)$$

que $\sigma = \pm$, rotula a direção de revolução do movimento clássico. Tendo em vista que a equação (4.11), não depende explicitamente de ϕ , usaremos uma solução do seguinte tipo:

$$\psi = {}^{i\ell\phi}R(r), \quad (4.13)$$

onde admita-se um número inteiro. Logo a equação de Schrödinger radial toma a seguinte forma:

$$\frac{1}{2m} \left(R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{m^2}{r^2} R \right) + \left(E - \frac{m\omega_{eff}^2}{8} r^2 + \frac{\sigma\ell\omega_{eff}}{2} - \frac{\sigma\omega_{eff}}{2} \right) R = 0, \quad (4.14)$$

fazemos agora uma mudança de variável definindo,

$$\xi = \frac{m\omega_{eff}}{2} r^2, \quad (4.15)$$

assim, podemos reescrever a equação (4.14) da forma,

$$\xi R'' + R' + \left(-\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{\ell^2}{4\xi} \right) R = 0, \quad (4.16)$$

no qual, $\beta = \frac{E}{\omega_{eff}} + \frac{\sigma(\ell-1)}{2}$. Tomando os limites assintóticos das soluções da equação (4.16), a solução torna-se,

$$R(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^{|\ell|/2} \zeta(\xi), \quad (4.17)$$

com isso, a equação (4.16) toma uma forma da equação hipergeométrica degenerada, onde é satisfeita através da função $\zeta(\xi)$ escrita por:

$$\zeta(\xi) = F \left[- \left(\beta - \frac{|\ell| + 1}{2} \right), |\ell| + 1, \xi \right], \quad (4.18)$$

com F sendo a função hipergeométrica degenerada. De modo que a função (4.18) seja finita, e o primeiro parâmetro torne-se um número inteiro não-positivo. Teremos a seguinte expressão para os autovalores de energia:

$$E = \left(N + \frac{|\ell|}{2} - \frac{\sigma\ell}{2} + \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \right) \omega_{eff}, \quad (4.19)$$

onde $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, no qual os valores de ℓ retratam as degenerescência dos níveis de Landau. As autofunções radiais são definidas da seguinte forma:

$$R_{N,\ell}(r) = \frac{1}{a^{|\ell|+1}} \left[\frac{(|\ell| + N)!}{2^{|\ell|} N! |\ell|!} \right] \exp \left(-\frac{r^2}{4a^2} \right) r^{|\ell|} F \left[-N, |\ell| + 1, \frac{r^2}{2a^2} \right], \quad (4.20)$$

que a corresponde a unidade de comprimento fundamental, definida por:

$$a = a_{eff} = \sqrt{\frac{1}{m\omega_{eff}}}. \quad (4.21)$$

Desta forma, concluí-se que os níveis de energia associados são infinitamente degenerados e independentes do centro das órbitas, porém dependem essencialmente da direção de revolução das órbitas clássicas.

4.3 Analogia dos níveis de Landau via a violação da simetria de Lorentz

Escolhendo a configuração de campo do sistema de acordo com a proposta de Ericsson e Sjöqvist [27]. O propósito no estudo da quantização de Landau possibilita descrever vários problemas, tais como o efeito Hall quântico [28], superfícies bi-dimensionais [29, 30], anyons excitações em rotação condensados de Bose-Einstein [31, 32] e outros sistemas. Inicia-se a verificação os análogos aos níveis de Landau para as Hamiltonianas não-relativísticas (2.15) e (2.16) em dois casos:

4.3.1 Caso Tipo-Espaço

Pode-se reescrever a Hamiltoniana (2.15), como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left[\vec{p} - g(\vec{n} \times \vec{E}) \right]^2 + \frac{g}{2m} \vec{z} \cdot \left[\vec{\nabla} \times (\vec{n} \times \vec{E}) \right] + g\vec{n} \cdot \vec{B}, \quad (4.22)$$

onde foi usado $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ e o vetor unitário \vec{z} que corresponde as matrizes de pauli $\vec{\sigma}$ na direção z. Para um sistema desse tipo Ericsson e Sjöqvist em [27], propuseram condições para configuração dos campos, possibilitando obter análogo a quantização de Landau. Com isso, é considerado o torque sobre partícula nulo, o campo elétrico estático $\partial_t \vec{E} = 0$ e $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ e o campo magnético uniforme. Com o movimento da partícula no plano x-y, as seguintes configurações de campo são satisfeitas:

$$\begin{aligned} \vec{z} &= (0, 0, 1); \\ \vec{E} &= E_0(x, 0, 0); \\ \vec{B} &= B_0(0, 0, x), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde E_0 e B_0 são constantes. Então pode-se definir os campos efetivos,

$$\begin{aligned} \vec{A}_{eff} &= \vec{z} \times \vec{E} = E_0(0, x, 0); \\ \vec{B}_{eff} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{eff} = E_0, \end{aligned} \quad (4.24)$$

desta forma, o campo efetivo \vec{B}_{eff} é homogêneo, e satisfaz as condições impostas em [27] para a analogia de quantização de Landau. Primeiramente entende-se o termo $g\vec{n} \cdot \vec{B}$ da equação (4.22) como o potencial escalar efetivo, definindo $\vec{n} = n_3\vec{z}$, temos:

$$V(x) = gn_3\vec{z} \cdot \vec{B} = gn_3B_0x, \quad (4.25)$$

que por sua vez gera um campo elétrico efetivo da forma,

$$\vec{E}_{eff} = -\nabla V(x) = -gn_3B_0(1, 0, 0), \quad (4.26)$$

com a substituição das condições adotadas na Hamiltoniana (4.22), é encontrado uma nova Hamiltoniana dada por,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}[\vec{p} - gn_3E_0x]^2 - \frac{g}{2m}n_3E_0 + gn_3B_0x, \quad (4.27)$$

desenvolvendo o termo quadrático e efetuando algebrismo, pode-se reescrever a equação acima semelhante a Hamiltoniana de um oscilador harmônico simples da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \left(x - \left(p_y\ell^2 - \frac{gn_3B_0}{m\omega^2} \right) \right)^2 - \frac{\omega}{2} \\ & + gn_3B_0 \left(x - \left(p_y\ell^2 - \frac{gn_3B_0}{m\omega^2} \right) \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{B_0}{E_0} \right)^2, \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde a frequência ciclotrônica e o comprimento fundamental é respectivamente como:

$$\omega = \frac{gn_3E_0}{m}; \quad \ell = \frac{1}{\sqrt{gn_3E_0}}. \quad (4.29)$$

Da hamiltoniana (4.28), escreve-se o centro da órbita clássica do oscilador harmônico como

$$X_k = \left(k\ell^2 - \frac{gn_3B_0}{m\omega^2} \right), \quad (4.30)$$

onde k é o autovalor da componente p_y , logo a Hamiltoniana pode ser reescrita na forma

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 (x - X_k)^2 - \frac{\omega}{2} + gn_3B_0X_k + \frac{1}{2}mv_D^2, \quad (4.31)$$

no qual, v_D está associado a velocidade de arraste $\frac{E_{eff} \times B_{eff}}{|B_{eff}|^2} = gn_3 \frac{B_0}{E_0} \vec{y}$. Obedecendo as relações de comutação

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i, \quad [\hat{y}, \hat{p}_y] = i, \quad [\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0, \quad (4.32)$$

logo, construí-se os seguintes operadores

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left((x - X_k) + i \frac{p_x}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left((x - X_k) - i \frac{p_x}{m\omega} \right), \quad (4.33)$$

com isso,

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} = \frac{m\omega}{2} (x - X_k)^2 + \frac{p_x^2}{2m\omega} - \frac{1}{2}, \quad (4.34)$$

satisfazendo a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. A Hamiltoniana é reescrita da seguinte forma:

$$\hat{\mathcal{H}} = \left(N + \frac{1 - \varsigma}{2} \right) \omega + gn_3 B_0 X_k + \frac{1}{2} m v_D^2, \quad (4.35)$$

tomando $N = \hat{a}^\dagger \hat{a}$, definido como sendo o operador número, que por sua vez obedece a relação $N |n\rangle = n |n\rangle$. E o $\varsigma = \pm$ é um rótulo que fornece a direção da frequência ciclotrônica. Como $\hat{\mathcal{H}} |n\rangle = E_n |n\rangle$, então

$$\hat{\mathcal{H}} |n\rangle = \left[\left(n + \frac{1 - \varsigma}{2} \right) \omega + gn_3 B_0 X_k + \frac{1}{2} m v_D^2 \right] |n\rangle = E_n |n\rangle, \quad (4.36)$$

assim, os níveis de energia quantizados para o oscilador harmônico são:

$$E_n = \left(n + \frac{1 - \varsigma}{2} \right) \omega + gn_3 B_0 X_k + \frac{1}{2} m v_D^2. \quad (4.37)$$

Agora, para a obtenção das funções de onda para o estado fundamental, atribuí-se que $\hat{a} |0\rangle = 0$ e para a representação $(x - X_k)$,

$$\langle x | \hat{a} |0\rangle = \frac{1}{\ell \sqrt{2}} \left((x - X_k) + \ell^2 \frac{d}{dx} \right) \langle x |0\rangle = 0, \quad (4.38)$$

onde foi usado que $\langle x | x = x \langle x |$ e o comprimento fundamental $\ell \equiv \sqrt{\frac{1}{m\omega}}$. Dessa forma,

$$\frac{d \langle x |0\rangle}{dx} = -\frac{(x - X_k)}{\ell^2} \langle x |0\rangle, \quad (4.39)$$

assim, encontra-se a seguinte solução,

$$\langle x|0\rangle = A \cdot \exp\left(-\frac{(x + X_k)^2}{2\ell^2}\right), \quad (4.40)$$

normalizando, é verificado que $A = \frac{1}{\sqrt{\ell\sqrt{\pi}}}$, conseqüentemente a autofunção para o estado fundamental é dado por

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell\sqrt{\pi}}}\exp\left(-\frac{(x - X_k)^2}{2\ell^2}\right), \quad (4.41)$$

onde $\Psi_0(x) = \langle x|0\rangle$. Pode-se obter a função de onda de qualquer estado excitado por uma série de aplicações do operador \hat{a}^\dagger no estado fundamental. Por exemplo, o primeiro estado excitado é encontrado através de uma única aplicação do operador \hat{a}^\dagger sobre o estado fundamental, como segue

$$\Psi_1(x) = \langle x|1\rangle = \langle x|\hat{a}^\dagger|0\rangle = \frac{1}{\ell\sqrt{2}}\left((x - X_k) - \ell^2\frac{d}{dx}\right)\Psi_0(x), \quad (4.42)$$

usando (4.39) e substituindo $\Psi_0(x)$ de acordo com (4.41), o primeiro estado excitado é dado por

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell^3\sqrt{\pi}}}(x - X_k)\exp\left(-\frac{(x - X_k)^2}{2\ell^2}\right), \quad (4.43)$$

logo, o segundo e o terceiro estado excitado são da seguinte forma

$$\Psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\ell\sqrt{\pi}}}\left(\frac{2(x - X_k)^2}{\ell^2} - 1\right)\exp\left(-\frac{(x - X_k)^2}{2\ell^2}\right), \quad (4.44)$$

$$\Psi_3(x) = \frac{1}{\sqrt{3\ell\sqrt{\pi}}}\left(\frac{2(x - X_k)^3}{\ell^3} - \frac{3x}{\ell}\right)\exp\left(-\frac{(x - X_k)^2}{2\ell^2}\right),$$

com isso, o enésimo estado excitado é escrito por

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}\frac{1}{\ell^{n+\frac{1}{2}}}\left((x - X_k) - \ell^2\frac{d}{dx}\right)^n \exp\left(-\frac{(x - X_k)^2}{2\ell^2}\right). \quad (4.45)$$

Neste ponto, será analisado a função de onda (4.45), usando a identidade do operador, da forma

$$e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2}\left((x - X_k) - \ell^2\frac{d}{dx}\right)e^{(x-X_k)^2/2\ell^2} = -\ell^2\frac{d}{dx}, \quad (4.46)$$

para a enésima aplicação da identidade do operador, é encontrada uma expressão para o termo da derivada e a exponencial da função de onda (4.45), dada por

$$\left((x - X_k) - \ell^2\frac{d}{dx}\right)^n e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} = (-1)^n(\ell^2)^n e^{(x-X_k)^2/2\ell^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2}, \quad (4.47)$$

e o lado direito da equação (4.47), pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} (-1)^n (\ell^2)^n e^{(x-X_k)^2/2\ell^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} &= \ell^n e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} \left[(-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2} \right] \\ &= \ell^n e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} H_n(y), \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde $y = (x - X_k)/\ell$ e $H_n(y)$ são os polinômios de Hermite, definidos pela seguinte expressão

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} e^{-y^2}, \quad (4.49)$$

a partir desta relação, é possível calcular os primeiros polinômios

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1, & H_1(y) &= 2y, \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2, & H_3(y) &= 8y^3 - 12y, \\ H_4(y) &= 16y^4 - 48y^2 + 12, & H_5(y) &= 32y^5 - 160y^3 + 120y. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Nota-se que os polinômios $H_{2n}(y)$ e ainda $H_{2n+1}(y)$ são funções ímpares, devido $H_n(-y) = (-1)^n H_n(y)$. Introduzindo (4.49) em (4.47), têm-se

$$\left((x - X_k) - \ell^2 \frac{d}{dx} \right)^n e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} = \ell^n e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} H_n \left(\frac{(x - X_k)}{\ell} \right), \quad (4.51)$$

logo, substituindo (4.51) em (4.45), pode-se reescrever a função de onda em termos dos polinômios de Hermite.

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \ell \sqrt{\pi}}} e^{-(x-X_k)^2/2\ell^2} H_n \left(\frac{(x - X_k)}{\ell} \right). \quad (4.52)$$

Observa-se que o estado n ésimo pode ser par ou ímpar, dependendo do valor de n ; na verdade, as funções $\Psi_{2n}(x)$ e $\Psi_{2n+1}(x)$ serão pares (ou seja, $\Psi_{2n}(-x) = \Psi_{2n}(x)$) e serão ímpares (ou seja, $\Psi_{2n+1}(-x) = -\Psi_{2n+1}(x)$), uma vez, como pode ser verificado utilizando (4.50), os polinômios de Hermite $H_{2n}(x)$ e $H_{2n+1}(x)$ são ímpares. Isso é esperado porque a função de onda de potenciais unidimensionais têm paridade definida. A presente dissertação não se detém aos estados altos, que como visto estão relacionados aos polinômios de Hermite. Porém, será focada em baixas energias concentrando os estudos somente no estado fundamental.

4.3.2 Caso Tipo-Tempo

Agora, determinaremos os níveis de Landau para a Hamiltoniana (2.16), que pode ser reescrita da seguinte forma,

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + g n_0 \vec{B} \right)^2 - \frac{g}{2m} n_0 \vec{z} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} \right], \quad (4.53)$$

semelhante ao caso tipo-espaço, usa-se $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ e \vec{z} como sendo o vetor unitário que corresponde as matrizes de Pauli na direção z. Adotando as configurações de campo propostas por Ericsson e Sjöqvist, onde o torque sobre a partícula é nulo, o campo elétrico estático e o campo magnético uniforme. Restringindo o movimento da partícula no plano x-y, segue,

$$\begin{aligned}\vec{z} &= (0, 0, 1), \\ \vec{A}_{eff} &= \vec{B} = B_0(0, x, 0), \\ \vec{B}_{eff} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}_{eff} = B_0\vec{z},\end{aligned}\tag{4.54}$$

onde B_0 é constante. Ao considerar as condições acima a Hamiltoniana (4.41) é reescrita como:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} (x + p_y\ell^2)^2 + \frac{\omega}{2},\tag{4.55}$$

com o comprimento fundamental e a frequência ciclotrônica dada por

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{gn_0B_0}} \quad e \quad \omega = \frac{gn_0B_0}{m}.\tag{4.56}$$

A partir da Hamiltoniana (4.55), são obtidos os autovalores de energia, para isso, se utiliza os seguintes operadores criação e destruição:

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left((x - k\ell^2) + i\frac{p_x}{m\omega} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left((x - k\ell^2) - i\frac{p_x}{m\omega} \right),\tag{4.57}$$

onde k é o autovalor da componente p_y do momentum, além disso, as relações de comutação devem ser satisfeitas.

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i, \quad [\hat{y}, \hat{p}_y] = i, \quad [\hat{x}, \hat{p}_y] = [\hat{y}, \hat{p}_x] = 0.\tag{4.58}$$

Dessa forma, a Hamiltoniana (4.55) é reescrita segundo

$$\hat{\mathcal{H}} = \left(N + \frac{1}{2} \right) \omega + \frac{\omega}{2},\tag{4.59}$$

onde o operador número N é igual a $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, que por sua vez obedece a relação $N|n\rangle = n|n\rangle$. Sabe-se que a Hamiltoniana em um estado n é igual ao autovalor da energia no mesmo estado n . Ou seja,

$$\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = \left(n + \frac{1+\zeta}{2} \right) \omega = E_n|n\rangle,\tag{4.60}$$

Então, os níveis de energia quantizados são dados por

$$E_n = \left(n + \frac{1 + \varsigma}{2} \right) \omega. \quad (4.61)$$

Afim de determinar a autofunção para o estado fundamental, utiliza-se o mesmo processo para o caso tipo-espaço, com isso, encontra-se

$$\Psi_0(x') = \frac{1}{\sqrt{\ell\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-k\ell^2)^2}. \quad (4.62)$$

Ao impor condições para configuração dos campos, obtêm-se um espectro de energia quantizado para os casos tipo-espaço e tipo-tempo, de forma análoga a quantização de Landau para partículas carregadas [26]. Agora, estudaremos o efeito Hall associado aos níveis de energia, priorizando determinar um análogo da condutividade Hall para uma partícula neutra na presença de um meio e de um parâmetro que quebra as simetria de Lorentz.

Capítulo 5

A violação da simetria de Lorentz: o efeito Hall

5.1 Introdução ao efeito Hall

O efeito Hall, descoberto em 1879 por Edwin Hall [33], trata-se de um condutor metálico sujeito a uma corrente elétrica em sentido longitudinal, na presença de um campo magnético perpendicular ao plano do condutor, produzindo uma diferença de potencial transversal. Considerando os elétrons com carga $-e$, a força de Lorentz devido ao campo magnético resulta na mudança da trajetória dos elétrons nas extremidades do condutor, assim gerando uma diferença de potencial transversal, conhecida como a voltagem Hall V_H . Medido-se a voltagem Hall, podemos calcular a intensidade de campo elétrico transversal, que através da densidade de corrente está relacionado com a condutividade, *i.e.* $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

Considere um condutor, onde os elétrons movem-se no plano x-y, com velocidade \vec{v} , e perpendicularmente exista a componente de campo magnético B_z . Assim, pode-se definir a densidade de corrente nas direções x e y da forma

$$J_x = -\frac{e\rho_0}{B_z} E_y; \quad J_y = \frac{e\rho_0}{B_z} E_x, \quad (5.1)$$

onde ρ_0 é a densidade de partículas de um gás de elétrons homogêneo. Com isso, determina-se a resistividade Hall R_{xy} , considerando a componente y do campo elétrico, temos

$$R_{xy} \equiv \frac{E_y}{J_x} = -\frac{B_y}{e\rho_0}. \quad (5.2)$$

Ao estabelecer valores fixos para a densidade ρ_0 , a resistividade Hall é classicamente uma função linear da componente perpendicular do campo magnético B_z . Sabe-se que a resistividade depende essencialmente de detalhes do componente estudado, como composição, geometria e impurezas. Em 1980, von Klitzing e colaboradores [34] desenvolveram a quantização do efeito Hall, apresentando resultados experimentais para a amostra MOSFET (Metal-oxide-semiconductor field-effect transistor), mostrando que hélio líquido à temperaturas baixas na presença de campos magnéticos intensos da ordem de 15T a condutividade Hall apresenta valores quantizados para qualquer geometria de uma amostra. Ademais, a quantização ocorre em plateaus, ou seja, em regiões nos quais a condutividade Hall permanece constante com a variação do campo magnético, no qual esses plateaus são valores múltiplos inteiros de e^2/h que foi um resultado não previsto anteriormente. Diante da proposta de Klitzing a resistividade (5.2) é dada

$$R_{xy} = -\frac{B_z}{e\rho_0} = -\frac{2\pi}{\nu e^2}, \quad (5.3)$$

onde ν refere-se ao fator de preenchimento de Landau, que assume valores inteiros no efeito Hall quântico inteiro estabelecido por Von Klitzing [34]. A resistividade também é definida por

$$R_{xy} = \frac{R_K}{\nu}, \quad (5.4)$$

onde R_K é a constante de Klitzing, que em razão de sua precisão, desde 1990 a constante de Klitzing é usada como a resistência padrão. Em unidades SI, a constante R_K é

$$R_K \equiv \frac{2\pi\hbar}{e^2} \simeq 25812.807\Omega. \quad (5.5)$$

Von Klitzing em seus estudos, relacionou a resistividade Hall com a constante de estrutura fina $\alpha = e^2/4\pi$, que por sua vez é uma das constantes fundamentais da natureza que caracteriza a magnitude da força eletromagnética. Um resultado foi dado em [35], onde

$$\alpha^{-1} = 137.0360037(27) \quad (0.020 \text{ ppm}), \quad (5.6)$$

que por sua vez é compatível com outros resultados experimentais como o efeito Josephson [36, 37], o comprimento de onda de Broglie do neutron [38] e o momento magnético anômalo do elétron [39]. Para uso internacional em [37], o valor da constante de estrutura

final é determinado pela CODATA (Committee of Data for Science and Technology - 1998) da seguinte forma

$$\alpha^{-1} = 137.03599976(50) \quad (3.7\text{ppb}). \quad (5.7)$$

Laughlin em 1981 [40], propôs a explicação para a quantização da condutividade Hall em plateaus de números inteiros através do experimento do metal de Laughlin, apresentando um caráter topológico e um comportamento linear da teoria. Em contrapartida em 1982 Tsui, Störmer e Gossard em [41] descobriram o efeito Hall quântico fracionário, onde a condutividade Hall pode assumir valores fracionários de e^2/h , em gases de elétrons confinados em interfaces de semicondutores com amostras mais puras e campos mais intensos. E o fator de preenchimento de Landau $\nu = p/q$ é dado através de p , onde atribui valores inteiros e q sendo um inteiro ímpar.

5.2 O efeito Hall via a violação da simetria de Lorentz

Levando em conta os campos intensos, o espaçamento entre os níveis de Landau vai ao infinito, somente o nível de Landau mais baixo desacopla de todos os outros. Com isso, esse limite projeta o sistema quântico estudado para o nível de Landau mais baixo. Desta forma, pode-se calcular o valor médio da corrente das partículas que se encontram no plano x-y, e determinar um análogo a condutividade Hall. Considere o sistema onde uma partícula neutra se encontra na presença de um meio eletromagnético que viola a simetria de Lorentz, será analisado a condutividade Hall para os casos tipo-espaço e tipo-tempo.

5.2.1 A condutividade Hall: primeiro caso

Considerando o campo magnético efetivo intenso, podemos desprezar os níveis de Landau mais altos, priorizando somente o nível mais baixo. Logo usando as autofunções (4.41), calcularemos o valor esperado da corrente, através da seguinte relação:

$$\langle \vec{J} \rangle = -\frac{gn_3q}{m} \langle \Psi_0 | \vec{p} - gn_3\vec{A}_{eff} | \Psi_0 \rangle, \quad (5.8)$$

onde ρ é a densidade de partículas, de acordo com (4.24) temos que a componente x se anula,

$$\langle J_x \rangle = -\frac{gv_3\rho}{m} \langle \Psi_0 | p_x | \Psi_0 \rangle = 0. \quad (5.9)$$

Já para a componente y o potencial vetor efetivo é igual a E_0x , logo o valor médio da corrente é:

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle &= -\frac{gn_3\rho}{m} \langle \Psi_0 | p_y - gn_3E_0x | \Psi_0 \rangle \\ &= -\frac{gn_3\rho}{m} \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{1}{\ell^2}(x-X_k)^2} (k - gn_3E_0x) dx \\ &= -\frac{gn_3\rho}{m} (k - gn_3E_0X_k) = -gn_3\rho \frac{B_0}{E_0} \\ &= -gn_3\rho v_D, \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde k é definido como autovalor da componente p_y e $v_D = B_0/E_0$ está relacionada com a velocidade de arraste. Agora utilizando a relação $\vec{J} = \sigma \vec{E}_{eff}$ na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

onde σ_{ij} a matriz é formada pelos elementos do tensor de condutividade Hall no plano x-y, e o campo elétrico efetivo $\vec{E}_{eff} = (E_x, E_y)$, onde em (4.26) $E_x = -gn_3B_0$ e $E_y = 0$. Então a condutividade Hall $\sigma_H = \sigma_{xy}$ é

$$\sigma_H = -\nu gn_3, \quad (5.12)$$

o fator de preenchimento de Landau é a razão entre a densidade de partículas ρ e a densidade de fluxo magnético efetiva E_0/ϕ_0 definido por

$$\nu = \frac{\rho}{\phi_0/E_0}, \quad (5.13)$$

e definimos $\phi_0 = (gn_3)^{-1}$ que é o quantum de fluxo. O valor do fator de preenchimento de Landau é cerca de p/q (p e q são números inteiros) que pode se um número inteiro ou fracionário racional.

5.2.2 A condutividade Hall: segundo caso

Adotaremos o campo magnético efetivo intenso, considerando somente o nível de Landau mais baixo da expressão (4.62). Desta forma, podemos calcular o valor esperado da corrente no plano x-y, levando em conta o potencial vetor em (4.54), novamente a componente x da corrente será nula

$$\langle J_x \rangle = -\frac{gn_0\varrho}{m} \langle \Psi_0 | p_x | \Psi_0 \rangle = 0, \quad (5.14)$$

para a componente y, temos

$$\begin{aligned} \langle J_y \rangle &= -\frac{gn_0\varrho}{m} \langle \Psi_0 | p_y - gn_0B_0x | \Psi_0 \rangle \\ &= -\frac{gn_0\varrho}{m} \frac{1}{\ell\sqrt{\pi}} \int e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-k\ell^2)^2} (k - gn_0B_0x) dx \\ &= -\frac{gn_0\varrho}{m} (k - gn_0B_0k\ell^2) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Devido a ausência de campo elétrico efetivo, a densidade de corrente na integral se torna perfeitamente antissimétrica em relação ao pico da gaussiana, com isso a corrente total se anula, e portanto não teremos condutividade Hall para o caso tipo-espaço.

Neste capítulo fizemos um breve revisão do efeito Hall clássico [33] e o efeito Hall Quântico [34], enfatizando a sua importância como uma manifestação da mecânica quântica, através da quantização da condutividade Hall. A também a oportunidade de uma medida precisa da constante de estrutura fina. Com o advento da uma analogia dos níveis de Landau, foi calculada a média da densidade de corrente e a condutividade Hall, nos casos tipo-espaço e tipo-tempo. Em termos dos fatores p e q que podem ser um número inteiro ou fracionário. Obtemos um análogo a condutividade Hall para o caso tipo-espaço, e concluímos que não ocorre o mesmo efeito para o caso tipo-tempo, pois não existe qualquer condutividade no plano de movimento das partículas, devido à ausência de um potencial escalar externo que gera o campo elétrico cruzado efetivo. Assim, a densidade de corrente é anti-simétrica sobre o pico de densidade de probabilidade Gaussiana e o valor esperado de corrente se anula, bem como o tensor de condutividade neste caso.

É de conhecimento geral que condutividade Hall pode ser medida experimentalmente com uma precisão muito elevada, abrindo boas oportunidades para detectar fenômenos muito pequenos, como os que violam a simetria de Lorentz. Alguns experimentos

foram realizados com níveis de Landau para elétrons e pósitrons em uma armadilha magnética, a fim de testar esta simetria [42, 43, 44]. Pode-se encontrar alguns limites para o parâmetro que viola a simetria de Lorentz, usando o sistema estudado, por exemplo, estabelecendo o comprimento natural dos sítios de Landau igual $\ell = (gn_3 E_0)^{-1/2}$, e resolvendo para gv_3 . No entanto, considerando a natureza mesoscópica do sistema de partículas neutras, estes limites seriam muito difíceis de encontrar utilizando valores laboratoriais apropriados para os campos.

Capítulo 6

Conclusão e Perspectivas

Esta dissertação propôs-se a fazer uma série de estudos da dinâmica de uma partícula quântica neutra em um meio que se caracteriza pela violação da simetria de Lorentz. Este sistema deu-se pela inserção de um acoplamento não-mínimo na equação de Dirac constituído por um campo constante $n_\mu = (n_0, \vec{n})$ que controla a quebra de Lorentz e campos elétrico e magnético. Constatamos que esse sistema tem o potencial de gerar fases geométricas, correções nos níveis de Landau e na condutividade Hall.

Na investigação de fases geométricas, observamos que a componente n_0 simula perfeitamente o efeito He-McKellar-Wilkins enquanto que a componente \vec{n} simula o efeito Aharonov-Casher respectivamente. Usamos tais efeitos para impor limites experimentais para a intensidade de cada componente que viola a simetria de Lorentz. Este tipo de análise é interessante pois ela pode ser confrontada com outros limites experimentais da intensidade da quebra da simetria de Lorentz obtidos via a eletrodinâmica quântica.

Ainda no contexto não-relativístico, foi construído uma boa analogia dos níveis de Landau associados a partícula neutra. Analisado os efeitos das componentes n_0 e \vec{n} de forma sistemática, foi possível encontrar os devidos auto-valores de energias incluindo o estado fundamental e as respectivas auto-funções para ambos os casos. No regime de campos intensos, foi observado que o nível de Landau mais baixo dessocia-se de todos os demais níveis e, este limite projeta o sistema no nível de energia mais baixo.

Depois do estabelecimento de uma analogia dos níveis de Landau, foi possível calcular a corrente média e a condutividade Hall para quantidades dependentes da componente

\vec{n} . Isto possibilitou a escrever a condutividade Hall em função dos fatores de preenchimento de Landau, os quais podem ser números inteiros ou fracionários. Já no caso em que n_0 é diferente de zero, não foi possível observar nenhum tipo de condutividade no movimento da partícula. Isto pode ser atribuído a ausência do potencial escalar que tem o poder de gerar campos elétricos efetivos cruzados.

O conteúdo desta dissertação oferece-nos suporte suficiente para desenvolver novas investigações de possíveis impactos de uma física não-convencional nos efeitos quânticos não-relativísticos tal como modelos que violam a simetria de Lorentz ou modelos oriundos de teorias de campos não-comutativas. Uma possibilidade imediata é a de rever todas as aplicabilidades deste trabalho via inserção de novos acoplamentos não-mínimos que violam a simetria de Lorentz na equação de Dirac. Aqui, destacamos: a indução de efeitos tipo Aharonov-Bohm escalar [46], Rashba [47], entre outros.

Referências Bibliográficas

- [1] GREINER, W., *Relativistic Quantum Mechanics and Wave Equations*, Springer, 3^a Edição, (2000).
- [2] GROSS, F., *Relativistic Quantum Mechanics and Field Theory*, Wiley Science Series, (1999).
- [3] ITZYKSON, C. and ZUBER, J.B., *Quantum Field Theory*, Dover Publications, 2nd edition, (1994).
- [4] HAGIWARA, K., *et al*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [5] COLLADAY, D. and KOSTELECKY, V. A., Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997); Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998).
- [6] CARROL, S., FIELD, G. and JACKIW, R., Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [7] CARROL, S. and JACKIW, R., Phys. Rev. Lett., **79**, 2394 (1997).
- [8] JACKIW, R. and KOSTELECKY, V. A. , Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999); PÉREZ-VICTORIA, M., Phys. Rev. Lett. **83**, 2518 (1999); JHEP 0104, 032 (2001); CHUNG, J. M. and CHUNG, B. K., Phys. Rev. D **63**, 1050015 (2001); BAËTA SCARPELLI, A. P., SAMPAIO, M., HILLER, B. and NEMES, M. C., Phys. Rev. D **64**, 046013 (2001); ANDRIANOV, A. A., GIACCONI, P. and SOLDATI, R., JHEP **0202**, 030 (2002); BONNEAU, G., Nucl. Phys. B **764**, 83 (2007).
- [9] EBERT, D., ZHUKOVSKY, V. C. and RAZUMOVSKY, A. S., Phys. Rev. D **70**, 025003 (2004); MARIZ, T., NASCIMENTO J. R., PASSOS, E., RIBEIRO, R. F., and BRITO, F. A., JHEP **0510**, 019 (2005) ; BRITO, F. A., NASCIMENTO, J. R., PASSOS, E. and PETROV, A. Yu. JHEP **06**, 016 (2007); BRITO, F. A., GRIGORIO,

- L. S., GUIMARAES, M. S., PASSOS, E. and WOTZASEK, C. Phys. Rev. D **78**, 125023 (2008).
- [10] BLUHM, R., KOSTELECKY, V. A. and RUSSELL, N., Phys. Rev. Lett. **79**, 1432 (1997); BLUHM, R., KOSTELECKY, V. A., LANE, C. D. and RUSSELL, N., Phys. Rev. Lett. **88**, 090801 (2002); BLUHM, R. and KOSTELECKY, V. A., Phys. Rev. Lett. **84**, 1381 (2000); BLUHM, R., KOSTELECKY, V. A. and LANE, C. D., Phys. Rev. Lett. **84**, 1098 (2000); BLUHM, R., KOSTELECKY, V. A. and RUSSELL N., Phys. Rev. Lett. **82**, 2254 (1999).
- [11] KOSTELECKY, V. A. and MEWES, M., Phys. Rev. D **80**, 015020 (2009); MYERS, R. C. and POSPELOV, M., Phys. Rev. Lett. **90**, 211601 (2003); BOLOKHOV, P. A. and POSPELOV, M., Phys. Rev. D **77**, 025022 (2008); REYES, C. M., URRUTIA, L. F. and VERGARA, J. D., Phys. Rev. D **78**, 125011 (2008); REYES, C. M., Phys. Rev. D **80**, 105008 (2009); Phys. Rev. D **82**, 125036 (2010).
- [12] BELICH, H., COSTA-SOARES, T., FERREIRA Jr., M. M. and HELAYEL-NETO, J. A., Eur. Phys. J. C **41**, 421 (2005).
- [13] RIBEIRO, L. R., PASSOS, E., FURTADO, C. and NASCIMENTO, J. R., arXiv: 0710.5858 [hep-th].
- [14] BELICH, H., COSTA-SOARES, T., FERREIRA Jr., M. M., HELAYEL-NETO and MOUCHERERK, F. M. O, Phys. Rev. D **74**, 065009 (2006).
- [15] BELICH, H., SILVA, E. O., FERREIRA Jr., M. M., and ORLANDO, M.T. D., Phys. Rev. D **83**, 125025 (2011).
- [16] PASSOS, E., RIBEIRO, L. R., FURTADO, C., NASCIMENTO, J. R., arXiv: 0802.2817 [hep-th].
- [17] RIBEIRO, L. R., PASSOS, E., FURTADO, C., J. Phys. G **39**, 105004 (2012).
- [18] AHARONOV, Y., and BOHM, D., Phys. Rev. **115**, 485, (1959).
- [19] AHARONOV, Y., and CASHER, A., Phys. Rev. Lett., **53**, 319, (1984).
- [20] CIMMINO, A., OPAT, G. I., KLEIN, A. G., KAISER, H., WERNER, S. A., ARIF, M., and CLOTHIER, R., Phys. Rev. Lett., **63**, 380, (1989).

- [21] HE, XIAO-GANG, and MCKELLAR, B. H. J., Phys. Rev. A, **47**, 3424, (1993).
- [22] WILKENS, M., Phys. Rev. Lett., **72**, 5, (1994).
- [23] WEI, H., HAN, R., and WEI, X., Phys. Rev. Lett., **75**, 2071, (1995).
- [24] SANGSTER, K., HINDS, E. A., BARNETT, S. M., and RIIS, E., Phys. Rev. Lett., **71**, 3641, (1993).
- [25] NITTA, J., MEIJER, F. E., and TAKAYANAGI, H., App. Phys. Lett., **75**, 695, (1999); MEIJER, F. E., MORPURGO, A. F., KLAPWIJK, T. M., Phys. Rev. B **66**, 033107 (2002); CHOI, T., CHO, S. Y., RUY, C-M., KIM, C. K., Phys. Rev. B **56** 4825 (1997); FRUSTAGLIA, D., and RICHTER, K., Phys. Rev. B **69**, 235310 (2004); SHEN, S-Q., LI, Z-L., MA, Z., App. Phys. Lett. **84**, 996 (2004).
- [26] LANDAU, L. D., Phys., **64**, 629, (1930).
- [27] ERICSSON, M., and SJÖQVIST, E., Phys. Rev. A, **65**, 013607, (2001).
- [28] PRANGE, R. E., and GIRVIN, S. M., *The Quantum Hall Effect*, Springer-Verlag, 2^a Edição, (1990).
- [29] COMTET, A., Ann. Phys., **173**, 185, (1987).
- [30] DUNNER, G. V., Ann. Phys., **215**, 233, (1992).
- [31] PAREDES, B., FEDICHEV, P., CIRAC, J. I., Zoller P., Phys. Rev. Lett. **87**, 010402, (2001).
- [32] PAREDES, B., Zoller P., CIRAC, J. I., State Commum. **127**, 155, (2003).
- [33] HALL, E. H., Am. J. Math., **2**, 287, (1879).
- [34] von KLITZING, V., DORDA, G., and PEPPER, M., Phys. Rev. Lett., **59**, 1776, (1987).
- [35] JEFFERY, A., et al. *1996 Conf. on Precision Electromagnetic Measurements. (17-20 June, 1996, Braunschweig, Germany)*.
- [36] JOSEPHSON, B. D., Rev. Mod. Phys., **46**, 251, (1974).
- [37] MOHR, P. J., and TAYLOR, B. N., Rev. Mod. Phys., **77**, 1, (2005).
- [38] KRÜNGER, E., NISTLER, W., and WEIRAUCH, W., Metrologia., **36**, 147, (1999).

- [39] HUNGHERS, V. W., and KINOSHITA, T., Rev. Mod. Phys., **71**, S133, (1999).
- [40] LAUGHLIN, R. B., Phys. Rev. B, **23**, 5632, (1981).
- [41] TSUI, D. C., STORMER, H. L., and GOSSARD, A. C., Phys. Rev. Lett., **48**, 1559, (1982).
- [42] MITTLEMAN, R. K., IOANNOU, I. I., DEHMELT, H. G., and RUSSELL, N., Phys. Rev. Lett., **83**, 2116, (1999).
- [43] DEHMELT, H., MITTLEMAN, R., VAN DYCK JR, R. S., and SCHWINBERG, P., Phys. Rev. Lett., **83**, 4694, (1999).
- [44] GABRIELSE, G., KHABBAZ, A., HALL, D. S., HEIMANN, C., KALINOWSKY, H., and JHE, W., Phys. Rev. Lett, **82**, 3198, (1999).
- [45] CASANA, R., FERREIRA Jr., M. M., SILVA, E.O., PASSOS, E. , SANTOS, F. E. P., Phys. Rev. D **87**, 047701 (2013).
- [46] LIMA, A. G, BAKKE, K., and BELICH, H., Annalen Phys. **526**, 514-519 (2014).
- [47] BAKKE, K., and BELICH, H., Annalen Phys. **526**, 187-194 (2014).