



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Amplificação de Pequenos Sinais em Osciladores  
Parametricamente Forçados**

por

**Desiane Maiara Gomes dos Santos**

CAMPINA GRANDE  
- Abril 2015 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
UNIDADE ACADÊMICA DE FÍSICA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

## **Amplificação de Pequenos Sinais em Osciladores Parametricamente Forçados**

**Desiane Maiara Gomes dos Santos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande, como requisito parcial para obtenção do Grau de Mestre em Física.

Área de Concentração: Física Não-Linear.  
Orientador: Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista.

CAMPINA GRANDE  
- Abril 2015 -

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA CENTRAL DA UFCG**

S237a Santos, Desiane Maiara Gomes Dos.  
Amplificação de pequenos sinais em osciladores parametricamente forçados / Desiane Maiara Gomes Dos Santos.– Campina Grande, 2017.  
94 f. : il. color.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2015.

"Orientação: Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista".

Referências.

1. Ressonância Paramétrica. 2. Amplificação Paramétrica. 3. Oscilador Não-Linear. 4. Oscilador de Duffing Paramétrico. 5. Método da Média. 6. Balanço Harmônico. 7. Bifurcações. I. Batista, Adriano de Albuquerque. II. Título.

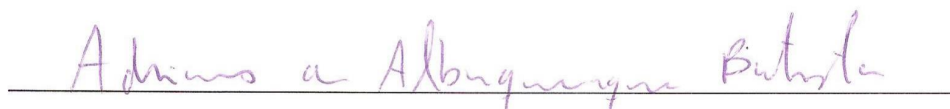
CDU 621.373.8(043)

**DESIANE MAIARA GOMES DOS SANTOS**

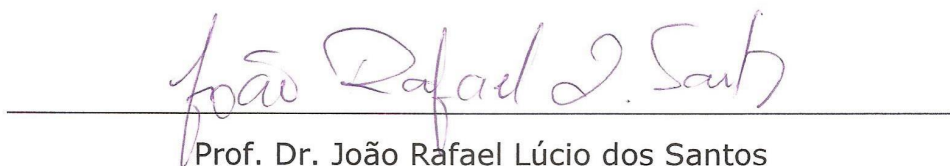
**AMPLIFICAÇÃO DE PEQUENOS SINAIS EM OSCILADORES  
PARAMETRICAMENTE FORÇADOS**

Dissertação aprovada em 10/04/2015

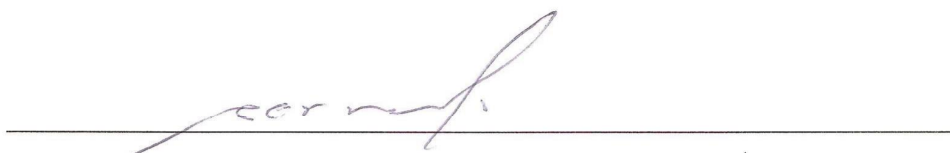
**BANCA EXAMINADORA**



Prof. Dr. Adriano de Albuquerque Batista  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG  
(Presidente)



Prof. Dr. João Rafael Lúcio dos Santos  
Unidade Acadêmica de Física - UFCG  
(Membro interno)



Prof. Dr. Luiz Alberto Terrazos Javier  
Unidade Acadêmica de Física e Matemática - UFCG  
(Membro externo)

# Dedicatória

*Ao meu grande incentivador,  
Euzébio Pereira do Nascimento (em memória),  
dedico este trabalho.*

# Agradecimentos

Ao autor e consumidor da fé.

Aos meus pais, Ivonete Gomes da Silva e Luiz Romão dos Santos e aos meus irmãos Diego Franklin e Yvana Maria por seguirmos juntos na realização dos meus sonhos, proporcionando-me todo o suporte necessário nessa minha caminhada de vida.

Aos meus queridos avós, Maria Avelino, Maria Romão e Severino Matias por serem os melhores em minha vida, sendo fontes constantes de amor, ternura, carinho, sabedoria e inspiração.

Ao Prof. Dr. Adriano Albuquerque Batista, pela orientação, presteza e paciência com que me auxiliou neste trabalho.

Ao amigo Raoni Sávio por toda colaboração e incentivo durante a produção dessa pesquisa.

Aos de sempre e que são presentes em minha vida, Acacio Silveira de Melo, Acássia Dafyne, Ana Beatriz Venâncio, Fabiana Lima, Fabiano Santos, Marcela Virgínia de Lima Andrade, Marcus Alexandre de Lima Andrade, Marcus Lima, Priscila Santos, Silvana Ribeiro e Simony Costa, sou imensamente grata pela companhia, por todo o carinho compartilhado e pelos incentivos contantes. Vocês são verdadeiras bênçãos para mim.

Aos colegas da Câmara Municipal de Bananeiras por serem companheiros nessa jornada.

Aos amigos, colegas, funcionários e Professores do Programa de Pós-Graduação em Física da Unidade Acadêmica de Física da Universidade Federal de Campina Grande pelo aprendizado e colaboração na minha formação e produção desta dissertação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

## RESUMO

Nesta dissertação, analisamos a dinâmica de osciladores parametricamente forçados, com enfoque na amplificação de pequenos sinais. Iniciamos por uma revisão da ressonância paramétrica e da amplificação paramétrica em um oscilador linear parametricamente excitado. Em seguida, estudamos dois tipos de osciladores não-lineares parametricamente forçados e concluímos a dissertação com a análise de um dímero parametricamente excitado. Basicamente, analisamos os fenômenos de ressonância paramétrica e de amplificação paramétrica, comparando os resultados obtidos analiticamente (via métodos da média ou do balanço harmônico) com os obtidos via integração numérica das equações do movimento. Em todos os casos, obtivemos a linha de transição para a instabilidade paramétrica do oscilador paramétrico. Nós excitamos o amplificador paramétrico com e sem dessintonia entre o bombeamento e o sinal externo ac. Verificamos que o ganho da amplificação paramétrica depende da sensivelmente na fase do sinal externo ac e na amplitude do bombeamento. Mostramos que tais sistemas podem ser facilmente utilizados para recepção e decodificação de sinais com modulação de fase. Além disso, obtivemos séries temporais, envelopes e transformadas de Fourier para a resposta da amplificação paramétrica de pequenos sinais ac. Especificamente nos casos dos osciladores de Duffing parametricamente forçados, obtivemos e analisamos linhas de bifurcação e a amplitude dos ciclos limites como função da frequência e da amplitude de bombeamento. Adicionalmente, conseguimos obter uma relação analítica para os ganhos do sinal e do idler dos osciladores não-lineares parametricamente forçados pelo método do balanço harmônico. Os resultados obtidos implicam que os amplificadores paramétricos não-lineares podem ser excelentes detectores, especialmente em pontos próximos a bifurcações para instabilidade, em que apresentam altos ganhos e largura de banda bem estreitas. Por último, investigamos também o comportamento de dois osciladores lineares acoplados e parametricamente estimulados, com e sem força externa ac. Tais sistemas são muito sensíveis à fase do sinal a ser amplificado e podem ser utilizados para criar amplificadores sintonizáveis em função do parâmetro de acoplamento.

**Palavras-chave:** Ressonância paramétrica, amplificação paramétrica, oscilador não-linear, oscilador de Duffing paramétrico, método da média, balanço harmônico, bifurcações.

## ABSTRACT

In this dissertation, we studied the dynamics of parametrically-driven oscillators, with a focus on the amplification of small signals. We begin with a revision of parametric resonance and parametric amplification in a linear oscillator parametrically excited. Next, we studied two types of nonlinear parametrically-driven oscillators and finished the dissertation with an analysis of a parametric dimer. Basically, we analyzed the phenomena of parametric resonance and parametric amplification by comparing the results obtained analytically (via the averaging or harmonic balance methods) with those of numerical integration of the equations of motion. In all cases, we obtained the transition line to parametric instability of the parametric oscillator. We excited the parametric amplifier with and without detuning between the pump and the external signal. We found that the parametric amplification depends sensitively on the phase of the external ac signal and on the internal pump amplitude. We showed that such amplifiers can be easily used for the reception and decoding of signals with phase modulation. Furthermore, we obtained time series, envelopes, and Fourier transforms of the response of the parametric amplifier to small external ac signals. Specifically in the cases of the parametrically-driven Duffing oscillators, we obtained and analysed the bifurcation lines and the amplitude of limit cycles as function of the pump amplitude and frequency. In addition, we derived an expression for the signal and idler gains of the nonlinear parametrically-driven oscillators with the harmonic balance method. The results imply that the nonlinear parametric amplifiers can be excellent detectors, specially near bifurcations to instability, due to their high gains and narrow bandwidths. Finally, we studied the dynamics of two linear oscillators coupled and parametrically excited, with and without external ac driving. We found that such systems have a wealth of dynamical responses. They present parametric amplification that is dependent on the coupling parameter and on the phases of the external ac signals. Such systems may be used as tunable amplifiers.

**Keywords:** Parametric resonance, parametric amplification, nonlinear oscillator, Duffing parametric oscillator, averaging method, harmonic balance, bifurcations.



# Conteúdo

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Ressonância Paramétrica</b>	<b>6</b>
2.1 O Oscilador Harmônico Forçado . . . . .	6
2.2 O Oscilador Parametricamente Forçado . . . . .	8
2.3 Linha de Transição para instabilidade - Método do Balanço Harmônico . . . . .	9
2.4 Linha de Transição para instabilidade - Método da Teoria da Média . . . . .	10
2.5 Função de Green . . . . .	14
2.6 Conclusão . . . . .	16
<b>3 Amplificação Paramétrica</b>	<b>18</b>
3.1 Amplificação Paramétrica degenerada - Método da Média . . . . .	19
3.2 Amplificação Paramétrica não-degenerada- Método da Média . . . . .	24
3.3 Conclusão . . . . .	30
<b>4 Ressonância Paramétrica em Osciladores Não-Lineares</b>	<b>31</b>
4.1 Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 1 . . . . .	31
4.2 Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 2 . . . . .	40
4.3 Conclusão . . . . .	45
<b>5 Amplificação Paramétrica em Osciladores Não-Lineares</b>	<b>46</b>
5.1 Amplificação Paramétrica do Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 1 . . . . .	46
5.2 Amplificação Paramétrica do Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 2 . . . . .	60
5.3 Conclusão . . . . .	72

<b>6</b>	<b>Dímero Parametricamente Forçado</b>	<b>74</b>
6.1	Dímero Parametricamente Forçado . . . . .	74
6.2	Linha de Transição de Instabilidade - Teoria da Média . . . . .	76
6.3	Envelopes . . . . .	79
6.4	Amplificação Paramétrica . . . . .	80
6.5	Conclusões . . . . .	88
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>89</b>

# Lista de Abreviaturas

AP	.....	amplificador paramétrico
AP	.....	amplificação paramétrica
DAP	.....	dímero amplificador paramétrico
DPF	.....	dímero parametricamente forçado
EDO	.....	equações diferenciais ordinárias
ODPF	.....	oscilador de Duffing parametricamente forçado
OHF	.....	oscilador harmônico forçado
OPF	.....	oscilador parametricamente forçado

# Lista de Símbolos

$F_s$	amplitude do sinal externo .....	7
$\gamma$	coeficiente de dissipação adimensional .....	7
$\varphi_0$	ângulo de deslocamento de fase em relação ao sinal externo .....	7
$2\omega$	frequência do bombeamento paramétrico .....	8
$F_p$	amplitude de bombeamento .....	8
$\Omega$	$\Omega = 1 - \omega^2$ .....	10
$B$	$-F_p/4\omega$ .....	11
$\eta$	$\Omega/2\omega$ .....	11
$\kappa$	$\sqrt{B^2 - \eta^2}$ .....	11
$\omega_s$	frequência do sinal .....	19
$\varphi_0$	fase do sinal .....	19
$\delta$	$\omega_s - \omega$ .....	24
$\varphi_0(t)$	$\varphi_0 - \delta t$ .....	24
$\alpha$	coeficiente não-linear .....	30
$\beta$	constante de acoplamento entre os dois osciladores .....	75
$\omega_1$	frequência natural do oscilador 1 .....	75
$\omega_2$	frequência natural do oscilador 2 .....	75
$\Lambda$	$-\omega_0^2 + \gamma^2/4 - \beta$ .....	75
$\lambda_{\pm}$	$\Lambda \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2}$ .....	75

$\Omega_{\pm}$	$-\lambda_{\pm} - \omega^2$ .....	76
$\delta_{\pm}$	$\Omega_{\pm}/2\omega$ .....	77
$\kappa_{\pm}$	$\sqrt{B^2 - \delta_{\pm}^2}$ .....	77

# Lista de Figuras

2.1	Comparação entre a previsão pelo método do balanço harmônico do resultado obtido na Eq. (2.12) e a integração numérica da Eq. (2.7) da linha de transição entre a zona estável e instável do OPF próximo a região de ressonância paramétrica quando fizemos $\gamma = 0.0$ . . . . .	13
2.2	Comparação entre a previsão pelo método do balanço harmônico do resultado obtido na Eq. (2.12) e a integração numérica da Eq. (2.7) da linha de transição entre a zona estável e instável do OPF próximo a região de ressonância paramétrica. . . . .	13
2.3	Fixamos os parâmetros $F_p$ , $\gamma$ e $\omega_0$ de modo que comparamos o resultado fornecido pela integração numérica da Eq. (2.7) com os resultados analíticos dado pela Eq. (2.27). As condições iniciais da função de Green quando $t = t' + 0^+$ são dadas por $G(t, t') = 0$ e $(\partial/\partial t)G(t, t) = 1, 0$ . . . . .	16
3.1	Estimativas analíticas e numéricas do ganho do amplificador paramétrico em relação à resposta do oscilador harmônico em função da fase. O ganho numérico foi obtido via integração numérica da Eq. (3.1) utilizando os valores estacionários de $U(t)$ e $V(t)$ quando $t = 2n\pi/\omega$ na transformação definida na Eq. (2.15), tais valores foram substituídos na Eq. (3.4). O ganho analítico foi obtido pela Eq. (3.5). . . . .	21
3.2	Estimativas numéricas e analíticas do ganho do amplificador paramétrico para a) $\omega = 0.9$ , b) $\omega = 1.0$ e c) $\omega = 1.1$ em função do bombeamento $F_p$ utilizando diferentes valores de $\varphi_0$ e com o coeficiente de dissipação $\gamma = 0.1$ . Os valores analíticos e numéricos de ganho foram obtidos da mesma forma que na Fig. 3.1. . . . .	22

3.3	AP com modulação de fase do sinal externo do sistema descrito pela Eq. (3.1). No quadro a), apresentamos a fase em função do tempo, que é uma onda quadrada que alterna entre duas fases: $\pi/4$ e $3\pi/4$ . No quadro b), mostramos o ganho linear em função do tempo da resposta do AP em relação ao sinal de entrada. Os parâmetros da Eq.(3.1) utilizados são os mesmos da Fig. 3.1. Observamos que os ganhos máximo (46dB) e mínimo (14dB) da resposta do amplificador estão de acordo com as previsões da Fig. 3.1, às quais adicionamos os 20dB da amplificação do OHF. No quadro c), mostramos o ganho alternando entre os dois estados. O ganho, no entanto é menor, pois utilizamos $F_p = 0.18$ . Por outro lado, observamos que a taxa de transmissão de dados pode ser maior, devido ao fato da parte real do expoente de Floquet mínimo ser maior. . . . .	23
3.4	Séries temporais do AP obtidas da integração numérica da Eq. (3.6), enquanto as envelopes são dadas por $\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$ , que obtemos da solução estacionária, Eq. (3.8), do sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (3.7) nas frequências $\omega = 0.9$ , $\omega = 1$ e $\omega = 1.1$ . . . . .	27
3.5	Transformadas de Fourier das séries temporais da Fig. 3.4 comparadas com os resultado analíticos obtidos a partir da Eq. (3.7). . . . .	28
3.6	Comparação das respostas analíticas e numéricas do OPF (sinal e idler) dependendo da frequência do sinal externo $\omega_s$ dadas pelas Eqs. (3.14) e (3.15) com a resposta do oscilador harmônico. . . . .	29
4.1	Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de $x(t)$ do ODPF 1 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência $\omega = 0.9375$ e a aproximação da teoria da média dada por $r^*$ da Eq. (4.6). Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.	34
4.2	Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de $x(t)$ do ODPF 1 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência $\omega = 1$ e a aproximação da teoria da média dada por $r^*$ da Eq. (4.6). Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude. . . . .	35
4.3	Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de $x(t)$ do ODPF 1 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência $\omega = 1.0625$ e a aproximação da teoria da média dada por $r^*$ da Eq. (4.6). Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.	36

4.4 Diagrama das linhas de bifurcação do ODPF 1 obtido a partir da Eq. (4.6). São mostradas as linhas de transição entre os regimes estável-instável, estável-biestável e biestável-instável, associando para cada tipo de transição as bifurcações existentes. As regiões (a), (b) e (c) são mostradas na Fig. 4.5. . . . . . 37

4.5 Diagrama de bifurcação do ODPF 1 associado ao sistema autônomo dado pela Eq. (4.2). No quadro (a) plotamos para  $\omega = 0.9375$ , mostrando que  $F_p$  entre 0.10 e 0.31 só um ponto é observado, o que corresponde ao ponto fixo estável. Quando  $F_p = 0.31$  ocorre uma bifurcação e a linha divide-se em duas, identificando assim a bifurcação forquilha supercrítica. No quadro (b) plotamos para  $\omega = 1$  mostrando que  $F_p$  entre 0.10 e 0.20 corresponde ao ponto fixo estável. Em  $F_p = 0.20$  ocorre a bifurcação de forquilha supercrítica. No quadro (c) plotamos para  $\omega = 1.0625$ , observando que  $F_p$  entre 0.10 e 0.22 corresponde ao ponto fixo estável e em  $F_p = 0.22$  temos a bifurcação sela-nó com um par de pontos fixos, sendo um estável e um instável. Observamos outro ponto fixo estável em  $F_p$  entre 0.10 e  $\cong 0.33$ . Quando  $F_p \cong 0.33$  temos a bifurcação de Hopf subcrítica. . . . . 38

4.6 Amplitude da resposta do ODPF 1 em função da amplitude de bombeamento  $F_p$ . Comparamos o resultado numérico dado pelo valor de pico da transformada de Fourier nas frequências  $\omega = 0.9375$ ,  $\omega = 1$  e  $\omega = 1.0625$  com o resultado analítico da Eq. (4.6). No quadro (a) ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica em  $F_p = 0.32$  no sistema não-autônomo original da Eq. (4.1), enquanto no sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (4.2) ocorre uma bifurcação forquilha supercrítica, em  $F_p = 0.31$ . No quadro (b) também ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica (sistema não-autônomo) e uma bifurcação forquilha em  $F_p = 0.2$  (sistema aproximado). No quadro (c) ocorre em  $F_p \cong 0.33$  uma bifurcação de forquilha subcrítica no sistema aproximado e de Hopf subcrítica no sistema não-autônomo. Também ocorre uma bifurcação sela-nó, aproximadamente em  $F_p = 0.22$ , gerando um par de pontos fixos (um estável e outro instável) no sistema aproximado e um par de ciclos limites no sistema não-autônomo. . . . . 39

4.7 Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 2 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 0.9375$ . Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude. . . . . 41



4.8	Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de $x(t)$ do ODPF 2 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência $\omega = 1.0$ . Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude. . . . .	42
4.9	Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de $x(t)$ do ODPF 2 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência $\omega = 1.0625$ . Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude. . . . .	43
4.10	No quadro (a) ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica em $F_p = 0.32$ no sistema não-autônomo original da Eq. (4.10), enquanto no sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (4.11) ocorre uma bifurcação forquilha supercrítica, em $F_p = 0.31$ . No quadro (b) também ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica (sistema não-autônomo) e uma bifurcação forquilha em $F_p = 0.2$ (sistema aproximado). No quadro (c) ocorre em $F_p = 0.2$ uma bifurcação Hopf subcrítica no sistema não-autônomo e uma bifurcação sela-nó, aproximadamente em $F_p = 0.18$ , gerando um par de pontos fixos estável no sistema aproximado e um par de ciclos limites no sistema não-autônomo. . . . .	44
5.1	Estimativas analíticas e numéricas do ganho do amplificador paramétrico em relação à resposta do oscilador harmônico em função da fase. O ganho analítico foi obtido a partir da Eq. (5.4), enquanto o ganho numérico foi obtido via integração numérica da Eq. (5.1), utilizando os valores estacionários de $U(t)$ e $V(t)$ quando $t = 2n\pi/\omega$ na transformação definida na Eq. (2.15). Em seguida, tais valores foram substituídos na expressão $20 \log_{10} \frac{\sqrt{U^2+V^2}}{F_s}$ . . . . .	51
5.2	Modulação de fase da AP do ODPF 1 correspondente à integração numérica do sistema descrito pela Eq. (5.1), mostrando que mesmo com a não-linearidade pode ocorrer a transmissão de informação. No quadro (a) mostramos a fase do sinal externo em função do tempo, ocorrendo alternância entre as fases $\pi/4$ e $3\pi/4$ , cujos ganhos estão de acordo com os resultados da Fig. 5.1. Nos quadros (b) e (c) mostramos o ganho em função do tempo da resposta do AP em relação ao sinal $F_s$ para diferentes valores de $F_p$ . A modulação de fase da AP do ODPF 1 em é a mesma em ambos os quadros. As séries temporais foram obtidas da integração numérica da Eq.(5.1) e as envelopes via teoria da média, mediante integração numérica do sistema EDO dado pelas Eqs. (5.2). . . . .	52

5.3	Séries temporais para AP do ODPF 1 obtidas da integração numérica da Eq. (5.1). As envelopes são dadas por $\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$ e são soluções estacionárias do sistema aproximado autônomo da Eq. (5.2) nas frequências $\omega = 0.9375$ , $\omega = 1.0$ e $\omega = 1.0625$ , respectivamente. . . . .	53
5.4	Amplificação paramétrica no ODPF 1. Transformadas de Fourier das séries temporais da Fig. 5.3. Os resultados numéricos foram obtidos a partir da Eq.(5.1), enquanto os resultados analíticos foram obtidos da Eq. (5.18). Nos três quadros vemos, proeminentemente, os picos correspondentes ao sinal e ao idler. Note que os picos de sinal e idler estão dispostos simetricamente em relação à metade da frequência de bombeamento $\omega$ . . . . .	54
5.5	Transformadas de Fourier para a AP do ODPF 1 na região de instabilidade paramétrica. Os resultados numéricos foram obtidos a partir de séries temporais estacionárias que obedecem a Eq.(5.1), enquanto os resultados analíticos foram obtidos a partir de séries temporais aproximadas a partir da da Eq. (5.18). O grande valor do pico em $\nu = \omega$ indica que estamos na região de instabilidade paramétrica. . . . .	55
5.6	Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.11) e do idler dado pela Eq. (5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e dos resultados analíticos das Eqs. (5.8) e (5.18). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 36(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para $Q = 65$ . . . . .	56
5.7	Resposta do ganho do sinal dado pela Eq.(5.11) e do idler dado pela Eq.(5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e os resultados analíticos e dos resultados analíticos das Eqs. (5.8) e (5.18).. Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 45(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , em torno de 9dB acima do ganho máximo do oscilador harmônico linear com $Q = 65$ . . . . .	57
5.8	Resposta do ganho do sinal dado pela Eq.(5.11) e do idler dado pela Eq.(5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e os resultados analíticos . Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 62(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , em torno de 26dB acima do ganho máximo do oscilador harmônico linear com $Q = 65$ . . . . .	58

5.9 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq.(5.11) e do idler dado pela Eq.(5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos um pico de ganho para o sinal caiu drasticamente em relação ao ganho no limiar de instabilidade, de um valor acima de 60dB para  $\approx 37(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , que é um pouco acima do ganho máximo do oscilador harmônico linear com  $Q = 65$ . Aqui o oscilador de Duffing foi bombeado na região de instabilidade. . . . . 59

5.10 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.11) e do idler dado pela Eq. (5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e dos resultados analíticos das Eqs. (5.8) e (5.18). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 36(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 65$ . 60

5.11 Estimativas analíticas e numéricas do ganho do amplificador paramétrico em relação à resposta do oscilador harmônico em função da fase. O ganho analítico foi obtido a partir da Eq. (5.16), enquanto o ganho numérico foi obtido via integração numérica da Eq. (5.13), utilizando os valores estacionários de  $U(t)$  e  $V(t)$  quando  $t = 2n\pi/\omega$  na transformação definida na Eq. (2.15). Em seguida, tais valores foram substituídos na expressão  $20 \log_{10} \frac{\sqrt{U^2+V^2}}{F_s}$ . . . . . 63

5.12 AP com a modulação de fase do sinal externo do sistema descrito pela Eq. (5.13). No quadro (a) mostramos a fase do sinal externo em função do tempo, ocorrendo alternância entre as fases  $\pi/4$  e  $3\pi/4$ , cujos ganhos estão de acordo com os resultados da Fig. 5.11. Nos quadros (b) e (c) mostramos o ganho em função do tempo da resposta do AP em relação ao sinal  $F_s$  para diferentes valores de  $F_p$ . A modulação de fase da AP do ODPF 2 em ambos quadros mostram a série temporal obtida mediante integração numérica da Eq.(5.13) e a envelope via teoria da média, obtida mediante integração numérica do sistema EDO dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b), sendo tal método utilizado para poder capturar o efeito de modulação de fase do sinal externo. . . . . 64

5.13 Série temporal para AP do ODPF 1 obtida numericamente a partir da Eq. (5.13) e a envelope analítica dada por  $\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$  que obtemos do sistema aproximado autônomo dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b) nas frequências  $\omega = 0.9375$ ,  $\omega = 1.0$  e  $\omega = 1.0625$ . Nos quadros a) e b) observamos as simetrias de translação, reflexão e de inversão temporal. No quadro c) apresenta uma quebra de simetria de inversão temporal. . . . . 65

5.14 Transformada de Fourier para a AP do ODPF 2 obtida numericamente a partir da Eq. (5.13) dada pelo valor dos picos nas frequências $\omega = 0.9375$ , $\omega = 1$ e $\omega = 1.0625$ comparada com o resultado analítico dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b). . . . .	66
5.15 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 36(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para $Q = 65$ . . . . .	67
5.16 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 45(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ . . . . .	68
5.17 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 36(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para $Q = 65$ . . . . .	69
5.18 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 21(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para $Q = 10$ . . . . .	70
5.19 Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 25(dB)$ em $\omega_s = 1.0$ , um pouco acima do ganho máximo do oscilador harmônico para $Q = 10$ . . . . .	71

5.20	Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de $\approx 28(dB)$ em $\omega_s \approx 1.06$ , um pouco acima do ganho máximo do oscilador harmônico para $Q = 10$ em $\omega_s = 1$ . . . . .	72
6.1	Comparação entre as previsões do método numérico e pela técnica da média da linha de transição para instabilidade paramétrica dada pela equação (6.17) que descreve os osciladores harmônicos parametricamente acoplados para $\beta = 0.01, 0.05, 0.25$ . . . . .	78
6.2	Séries temporais para o dímero parametricamente forçado obtidas numericamente a partir da Eq. (6.11) e a envelope analítica a partir da Eq. (6.20) para os dois osciladores. . . . .	80
6.3	Ganho numérico como uma função da fase $\varphi_1$ a partir da Eq. (6.34), mostrando que o dímero pode ser usado como um amplificador de banda estreita ajustável e muito sensível à fase. O ganho é obtido do valor do pico da transformada de Fourier de séries temporais estacionárias em $\omega$ . . . . .	83
6.4	(a) Séries temporais para AP do dímero parametricamente forçado obtidas a partir da integração numérica da Eq. (6.22). (b) Transformadas de Fourier correspondentes. Em ambos os quadros, a linha vermelha indica a resposta do oscilador com bombeamento paramétrico, enquanto a linha preta indica a resposta do dímero quando não há bombeamento. $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . O ganho em relação à amplitude do sinal externo $F_s$ é de aproximadamente 62dB, em concordância com a Fig. 6.3 . . . . .	84
6.5	Série temporal para AP do dímero parametricamente forçado obtida numericamente a partir da Eq. (6.22) e a transformada de Fourier correspondente. A linha vermelha mostra a resposta do oscilador com bombeamento paramétrico. A linha preta mostra a série temporal quando não há bombeamento. O ganho em relação à amplitude do sinal externo $F_s$ é de aproximadamente 50dB, em concordância com a Fig. 6.3. . . . .	85
6.6	Resposta do ganho numérico para o sinal e o idler em função da frequência do sinal $\omega_s$ dada pelas Eqs. (6.34) e (6.35). . . . .	86
6.7	Ganho do sinal Eq. (6.22) como função do parâmetro de acoplamento $\beta$ . . . . .	87

## Introdução

Oscilações parametricamente excitadas ocorrem em sistemas dinâmicos que apresentam ressonância e em que pelo menos um de seus parâmetros varia periodicamente com o tempo. Na mecânica clássica, essas oscilações podem existir, por exemplo, em pêndulos cujo comprimento ou o ponto de apoio varia periodicamente no tempo [1]. Um exemplo comum de oscilações parametricamente excitadas é o de uma criança oscilando num balanço. Mesmo sem encostar os pés no chão e sem ser empurrada por uma outra pessoa, a criança consegue oscilar o balanço quando modula a altura de seu centro de massa periodicamente. Quando esse tipo de oscilação ocorre, estamos tratando do fenômeno da ressonância paramétrica. Esse fenômeno se manifesta de maneira mais forte quando a frequência de bombeamento (modulação) é igual ou próxima a duas vezes  $\omega_0$ , a frequência natural do oscilador. Além desse caso, a ressonância paramétrica também pode ocorrer em frequências de bombeamento iguais ou próximas a  $\omega = 2\omega_0/n$ , com  $n = 1, 2, 3, \dots$

A ressonância em um sistema dinâmico linear harmonicamente forçado e amortecido, com coeficientes constantes, é caracterizada por picos de amplitude das oscilações harmônicas em um número finito de frequências, conhecidas como frequências naturais de oscilações (ou frequências dos modos normais de oscilação). Essas oscilações forçadas ocorrem para qualquer amplitude não nula da força externa aplicada. Já no fenômeno da ressonância paramétrica, que ocorre no [oscilador parametricamente forçado \(OPF\)](#) (em que pelo menos um coeficiente varia periodicamente no tempo), há um limiar para as oscilações ocorrerem. Quando a amplitude da força paramétrica está abaixo de um certo valor, o estado quiescente do oscilador é estável. Por outro lado, quando a amplitude da força paramétrica está acima de um certo valor as oscilações crescem indefinidamente, quaisquer que sejam os valores dos coeficientes de dissipação. Somente na linha de transição entre estabilidade e instabilidade as oscilações são periódicas. Em sistemas físicos, no entanto, quando a amplitude de oscilação aumenta muito, termos não-lineares da equação de movimento do oscilador passam a ser relevantes. Como consequência a frequência natural de oscilação passa a variar com a amplitude, resultando assim na estabilização da amplitude

de oscilação. Outra propriedade distintiva da ressonância paramétrica, é que ela pode ocorrer em um número infinito de frequências, como mencionado acima. No entanto, na prática somente as primeiras ressonâncias são observadas.

No século XIX surgiram as primeiras investigações científicas sobre o que leva um oscilador parametricamente forçado à ressonância paramétrica. Os primeiros sistemas investigados em que ocorria a ressonância paramétrica foram estudados por Michael Faraday em 1831 [2]. Ele iniciou os estudos sobre oscilações paramétricas quando observou que a superfície de um determinado líquido no interior de um cilindro que oscilava verticalmente apresentava uma vibração completa a cada duas vibrações completas do cilindro. Após os estudos de Faraday, Melde em 1859 [3] esticou um fio entre um suporte rígido e a extremidade de um diapasão. Ele percebeu que quando o diapasão vibrava, embora a força de excitação fosse longitudinal, a corda vibrava transversalmente com a metade da frequência natural do diapasão. Baseando-se nos trabalhos teóricos de Mathieu [4] e Hill [5], em 1887, Lord Rayleigh [6] conseguiu explicar matematicamente os fenômenos observados por Faraday e Melde.

Uma importante característica do OPF ocorre quando ele também é excitado por uma força externa ac e quando a amplitude de bombeamento está abaixo do limiar de instabilidade. Nessa situação o OPF pode funcionar como um amplificador, ou seja, quando a resposta do oscilador à força externa ac é maior quando há bombeamento do que quando não há bombeamento. Quando o OPF não é bombeado ele se torna um **oscilador harmônico forçado (OHF)** simples, cuja maior resposta ocorre na ressonância, quando a frequência do sinal externo é igual à frequência natural do oscilador. Nesse ponto, sabemos que o ganho máximo do OHF é  $Q$ , o fator de qualidade do OHF, enquanto a largura de banda do oscilador é aproximadamente o valor do coeficiente de dissipação ( $\omega_0/Q$ ). No entanto, o OPF pode apresentar ganhos muito superiores a  $Q$ , isso vem, no entanto, acompanhado de uma menor largura de banda do que a do OHF.

Os amplificadores de pequenos sinais possuem como características principais a linearidade, o ganho e a largura de banda. Dentro da largura de banda de um amplificador, a amplitude da resposta a um pequeno sinal ac a ser detectado é maior que a amplitude desse sinal. Veremos nesta dissertação que a **amplificação paramétrica (AP)** será utilizada para detectar pequenos sinais ao aumentar a resposta dinâmica (ganho) de um oscilador local para pequenas excitações harmônicas. Em um amplificador paramétrico, um sinal forte, chamado sinal de bombeamento ou excitação paramétrica, injeta energia no sinal mais fraco que se deseja reforçar, amplificando-o. Tipicamente há duas componentes espectrais na resposta do amplificador paramétrico: Uma na frequência do sinal ( $\omega_s$ ) e outra na frequência do *idler* ( $\omega_i$ ), que existe devido à mistura com a frequência de bombeamento ( $2\omega = \omega_s + \omega_i$ ) [7]. No entanto, quando o **amplificador paramétrico (AP)** tem termos não lineares e a amplitude de bombeamento está acima do limiar de instabilidade, aparece uma componente espectral na metade da frequência de bombeamento. Essa componente

central é característica da instabilidade paramétrica e ocorre independentemente da existência do sinal externo. Veremos também que o AP tipicamente opera apenas em faixas muito estreitas de frequências [8].

Os primeiros amplificadores paramétricos eletrônicos começaram a ser utilizados entre 1914-1915 para radiotelegrafia entre Berlim e Viena [9]. Embora o interesse em utilizar amplificadores paramétricos tenha diminuído a partir de 1916, com a invenção de moduladores de vácuo, uma nova versão de AP's retornou em 1954 com a invenção de diodos de silício, que possuem baixo custo e apresentam capacitância variável. Tais dispositivos permitiram que se montassem ressonadores LC, cuja frequência natural poderia ser facilmente modulada até a faixa de microondas. Após o advento do laser, no início da década de 60, o interesse científico e tecnológico pelo AP clássico diminuiu. No entanto, anos depois surgiram importantes aplicações quânticas da AP em lasers, tal como a amplificação de sinais de laser em fibras ópticas que são largamente utilizadas até hoje em linhas de transmissão de dados da internet [8].

Outro sistema físico em que ocorrem oscilações paramétricas são as junções de Josephson, propostas por Brian Josephson em 1964 [10]. Esses dispositivos têm uma indutância não-linear, o que permite que ela seja modulada em circuitos ressonadores. Essas junções são conhecidas por serem dispositivos adequados para a detecção e geração de oscilações eletromagnéticas na faixa de frequência de gigahertz [11]. Em tais sistemas foram desenvolvidos diversos tipos de amplificadores paramétricos, tais como o proposto na Ref. [12] que é baseado na modulação do fluxo magnético em um SQUID.

No início da década de 90, a AP clássica retorna a ser de interesse dos pesquisadores com o surgimento de dispositivos microeletromecânicos (MEMS), que são constituídos por elementos mecânicos, sensores e eletrônicos em um pequeno chip. Em um ressonador de MEMs de alto fator de qualidade, Rugar e Grütter estudaram experimentalmente a AP com o intuito de detectarem ondas gravitacionais [13]. Mais recentemente, surgiram dispositivos sensores opto-mecânicos, que são sensíveis à pressão de radiação em cavidades opto-mecânicas. Em tais sistemas pode haver instabilidades paramétricas optomecânicas [14]. A amplificação paramétrica em tais sistemas foi recentemente utilizada para a detecção de ondas gravitacionais [15].

As principais contribuições desta dissertação foram as análises da AP em OPF's não lineares e da AP em um sistema consistindo de dois OPF's acoplados linearmente entre si. As técnicas de análise utilizadas foram dois métodos perturbativos de aproximação de soluções de equações diferenciais: o método da teoria da média [16–18] e o método do balanço harmônico [19]. Adicionalmente utilizamos métodos de integração numérica das equações diferenciais envolvidas. Mais detalhes sobre a aplicação dessas técnicas no contexto da AP estão nas Refs. [20, 21].

O enfoque nesta dissertação, no caso dos OPFs amortecidos e com termos não-lineares cúbicos, foi de entender as principais bifurcações para a região de instabilidade para-



métrica, bem como de estudar os ciclos limites do OPF nessa região. No caso da AP nesses sistemas, nosso objetivo principal foi o de investigar a dependência do ganho com a não-linearidade. Verificamos que ainda é possível obter altos ganhos na região próxima à instabilidade paramétrica. Verificamos também que tais sistemas podem servir de receptores de ondas com modulação de fase, que podem ser utilizadas para transmissão de informação.

Talvez a principal contribuição do presente trabalho seja o estudo sobre um dímero parametricamente excitado. Mostramos como obter sua zona de instabilidade paramétrica e como ela pode ser modificada ao se variar o coeficiente de acoplamento entre os dois osciladores. Vimos também como utilizar isso para o desenvolvimento de um AP de alto ganho e estreita largura de banda cujo pico de amplificação pode ser sintonizado em uma banda larga de frequências ao se variar o coeficiente de acoplamento.

A seguir descrevemos a organização dos demais capítulos desta dissertação:

**Capítulo 2:** Realizamos uma breve revisão sobre o OHF, comparando-o com o OPF. Utilizamos os métodos da média e do balanço harmônico para obtermos a primeira linha de transição para instabilidade paramétrica. Além disso, obtivemos a função de Green do OPF via método da média.

**Capítulo 3:** Estudamos inicialmente a AP do OPF em sintonia, de modo que realizamos estimativas para o ganho dependente da fase e do bombeamento, utilizando o método da média. Em seguida, ainda com a técnica do método da média, estudamos a AP em dessintonia (AP não-degenerada) e obtivemos, analiticamente envelopes e transformadas de Fourier de séries temporais do AP. Finalmente, obtivemos expressões analíticas para o o ganho do sinal e do idler pelo método do balanço harmônico.

**Capítulo 4:** Aqui introduzimos não-linearidades cúbicas e estudamos seus efeitos sobre a ressonância paramétrica no OPF. Encontramos as amplitudes das soluções periódicas (ciclos limites), linhas e diagramas de bifurcação para dois tipos de *oscilador de Duffing parametricamente forçado (ODPF)* via método da média e integração numérica.

**Capítulo 5:** Aqui estudamos a AP nos ODPF. Obtivemos séries temporais, e correspondentes envelopes e transformadas de Fourier pela técnica da média. Obtivemos também expressões para os ganhos do sinal e do idler dos osciladores não-lineares parametricamente forçados pelo método do balanço harmônico. Os resultados analíticos foram comparados com os correspondentes resultados numéricos.

**Capítulo 6:** Neste capítulo investigamos os fenômenos de ressonância paramétrica e AP em dois osciladores parametricamente forçados e linearmente acoplados entre si. Para o caso especial em que os dois osciladores têm o mesmo coeficiente de dissipação e a mesma amplitude de bombeamento, pudemos analisar seus modos normais de vibração via uma transformação canônica. Após essa transformação, obtivemos envelopes para séries temporais e a linha de transição para a instabilidade paramétrica desse sistema. Finalmente, obtivemos expressões analíticas e resultados numéricos para o ganho

da amplificação paramétrica no [dímero amplificador paramétrico \(DAP\)](#).

**Capítulo 7:** Finalizamos o trabalho apresentando nossas conclusões.

## Ressonância Paramétrica

Neste capítulo fazemos uma revisão sobre o fenômeno da ressonância paramétrica que ocorre em osciladores parametricamente forçados. Neste contexto, apresentamos as técnicas analíticas utilizadas para obter perturbativamente soluções aproximadas. Essas técnicas são o método da média (para transientes e soluções estacionárias) e o método do balanço harmônico (para soluções estacionárias). Além dessas técnicas, utilizamos métodos de integração numérica para checar a validade das aproximações analíticas. O desenvolvimento apresentado neste capítulo serve de fundamento para os resultados apresentados nos capítulos seguintes.

Na seção 2.1 apresentamos a solução estacionária, o ganho e a função de Green do OHF. O intuito desta apresentação básica é tão somente para servir de comparação para os resultados posteriores referentes ao OPF. Na seção 2.2 apresentamos a equação de movimento do OPF e descrevemos suas principais características. Na seção 2.3 encontramos a linha de transição para instabilidade paramétrica pelo método do balanço harmônico. Na seção 2.4 encontramos a linha de transição para instabilidade paramétrica do OPF pelo método da média. Na seção 2.5 obtemos a função de Green aproximada do OPF pelo método da média para a região em que a frequência de bombeamento é aproximadamente o dobro da frequência natural.

### 2.1 O Oscilador Harmônico Forçado

A equação do OHF em unidades adimensionais é dada por

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + x(t) = F_s \cos(\omega t), \quad (2.1)$$

em que  $\gamma = 1/Q$  é o coeficiente de dissipação e  $Q$  é o fator de qualidade,  $F_s$  é a amplitude do sinal externo e  $\omega$  é a razão entre a frequência de excitação e a frequência de ressonância do OHF.

A solução geral da Eq. (2.1) é dada por

$$x(t) = x_h(t) + \operatorname{Re} \{ \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} \}, \quad (2.2)$$

onde  $x_h(t)$  é a solução homogênea (transiente) e a segunda função, a solução não-homogênea ou estacionária, é a resposta linear à força oscilatória externa, com

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{F_s}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}.$$

A resposta estacionária da Eq. (2.2) pode ser escrita da forma

$$x(t) = \frac{F_s}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.3)$$

em que  $\varphi_0$  é o ângulo de fase em relação ao sinal externo, que é dado por

$$\varphi_0 = -\arctan\left(\frac{\omega\gamma}{1 - \omega^2}\right). \quad (2.4)$$

O ganho em decibel (dB) em relação à amplitude do sinal de entrada é dado por

$$G_{OHF}(\omega) = 20 \log_{10} \frac{|\tilde{x}(\omega)|}{F_s} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}. \quad (2.5)$$

A seguir calculamos a função de Green do OHF, que é definida como a função que satisfaz a equação

$$\left[ \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + 1 \right] G(t - t') = \delta(t - t'),$$

onde  $G(t - t') = 0$  para  $t \leq t'$ . Para encontrarmos  $(\partial/\partial t)G(0^+)$ , integramos a equação de movimento através da função  $\delta$ -Dirac,

$$\int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \left[ \frac{d^2}{dt^2} + \gamma \frac{d}{dt} + 1 \right] G(t - t') dt = \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} \delta(t - t') dt = 1,$$

de modo que

$$\left[ \frac{\partial G(t - t')}{\partial t} + \gamma G(t - t') \right] \Big|_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} + \int_{t'-\epsilon}^{t'+\epsilon} G(t - t') dt = 1.$$

O limite inferior do primeiro termo desaparece pois  $G(t - t') = 0$  quando  $t < t'$ . A integral desaparece no limite em que  $\epsilon \rightarrow 0$  pois  $G(t - t')$  é uma função contínua e

portanto  $G(0^+) = G(0^-) = 0$ . Assim obtemos

$$\frac{\partial G(0^+)}{\partial t} = 1.$$

Portanto, a função de Green do **OHF** é uma solução homogênea de um **OHF** com os valores iniciais  $G(0) = 0$  e  $G'(0) = 1$ , ou seja

$$G(t - t') = \frac{1}{\rho} e^{-\gamma(t-t')/2} \text{sen}[\rho(t - t')], \quad (2.6)$$

para  $t \geq t'$  com  $\rho = \sqrt{1 - \gamma^2/4}$ .

## 2.2 O Oscilador Parametricamente Forçado

O **OPF** com dissipação é descrito pela equação de movimento dada por

$$\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + x(t) = F_p \cos(2\omega t)x(t), \quad (2.7)$$

sendo  $\gamma$  o coeficiente de dissipação,  $F_p$  a amplitude de bombeamento e  $2\omega$  a frequência do bombeamento paramétrico.

O **OPF** é um sistema dinâmico linear no sentido de que suas soluções formam um espaço vetorial linear. Essas soluções, no entanto, dependem de maneira não-linear em  $F_p$  e em  $\omega$ . Na Eq. (2.7) vemos que  $x(t) = 0$  é sempre uma solução (chamada de solução quiescente ou trivial). Somente quando a amplitude de bombeamento ultrapassa um valor mínimo é que essa solução trivial se torna instável e, assim, obtemos soluções seculares (divergentes). Esse valor mínimo da amplitude de bombeamento é conhecido como o limiar (ou fronteira) de instabilidade. Essa fronteira de instabilidade tem medida zero no espaço  $(\omega, F_p)$  e codimensão 2 [18], ou seja, precisamos variar dois parâmetros ( $\omega$  e  $F_p$ ) para chegarmos a ela.

Comparando os tipos de soluções do **OPF** com as do **OHF**, vemos que no **OHF** não há a solução quiescente e que a solução divergente (secular) só ocorre quando não há dissipação e quando  $\omega = 1$ , não existindo limiar de instabilidade. O **OPF**, por outro lado, apresenta solução periódica somente na fronteira de instabilidade, cuja amplitude depende apenas dos valores iniciais do sistema dinâmico descrito pela Eq. (2.7).

Existem várias propriedades dinâmicas do **OPF** que são marcadamente diferentes do **OHF**. Enquanto o **OHF** apresenta a ressonância apenas quando modificamos um parâmetro, ou seja, em  $\omega \approx 1$ , o **OPF** necessita que dois parâmetros sejam modificados,  $F_p$  e  $\omega$ , para que a ressonância paramétrica seja atingida. Para os valores  $\omega \approx 2, 1, 2/3, 1/2, \dots$  o limiar de instabilidade é mais baixo, chegando a zero no caso em que  $\gamma = 0$ . O ganho no **OHF** é no máximo igual ao fator de qualidade  $Q$ , enquanto no **OPF** não podemos falar

em ganho. Somente no caso do AP bombeado abaixo do limiar de instabilidade teremos que a resposta do AP é linear em relação ao sinal externo aditivo.

Com o objetivo de estudarmos o sistema dado pela Eq. (2.7) utilizamos como método de integração numérica com o algoritmo Runge-Kutta-4 [22], métodos analíticos da teoria da média [17, 18], do balanço harmônico [23] e função de Green [21]. A seguir, mostraremos como obter a linha de transição para instabilidade paramétrica no OPF pelos métodos do balanço harmônico e da média, técnicas essas que utilizaremos posteriormente para encontrar soluções dos osciladores não-lineares parametricamente forçados e para estudarmos a amplificação paramétrica.

## 2.3 Linha de Transição para instabilidade - Método do Balanço Harmônico

De acordo com a teoria de séries de Fourier as soluções periódicas do sistema dinâmico dado pela Eq. (2.7) podem ser expressas como a soma de harmônicos da seguinte forma

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}. \quad (2.8)$$

Aqui supomos que  $x(t) = x(t + T)$  com  $T = 2\pi/\omega$ . O método do balanço harmônico supõe que soluções periódicas de sistemas dinâmicos tais como o da Eq. (2.7) podem ser aproximadas por uma série de Fourier truncada, com um número finito de termos. Essa hipótese baseia-se no fato de que a base de funções linearmente independentes  $e^{in\omega t}$ , onde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , é completa e forma um espaço vetorial linear. Assim, da equação diferencial (2.7), obtemos um sistema de equações algébricas para os coeficientes  $c_n$ .

Supomos que a solução periódica pode ser escrita em primeira aproximação da seguinte forma

$$x(t) = c_n e^{i\omega t} + c_n^* e^{-i\omega t}. \quad (2.9)$$

Ao substituirmos esse Ansatz na Eq. (2.7), desprezando os termos contendo  $3\omega, 5\omega, \dots$  e utilizando o fato das funções  $e^{i\omega t}$  e  $e^{-i\omega t}$  serem linearmente independentes, encontramos o seguinte sistema algébrico

$$\begin{pmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -\frac{F_p}{2} \\ -\frac{F_p}{2} & \Omega - i\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_n \\ c_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Obtemos que esse sistema possuirá soluções não triviais somente se

$$\begin{vmatrix} \Omega + i\gamma\omega & -\frac{F_p}{2} \\ -\frac{F_p}{2} & \Omega - i\gamma\omega \end{vmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

Assim determinamos em primeira aproximação a primeira linha de transição para ressonância paramétrica, isto é, a fronteira entre a região estável e a instável, que é dada por

$$(\gamma\omega)^2 = \left(\frac{F_p}{2}\right)^2 - \Omega^2. \quad (2.12)$$

## 2.4 Linha de Transição para instabilidade - Método da Teoria da Média

Outro método perturbativo que iremos utilizar em muitos momentos ao longo desta dissertação é o método da média. Enquanto o método do balanço harmônico é utilizado somente para obter soluções periódicas, o método da média [17, 18, 20] pode ser utilizado também para obter transientes aproximadamente. De maneira resumida, o método da média transforma um sistema dinâmico não-autônomo com aproximadamente duas escalas de tempo (uma rápida e outra lenta) em um sistema dinâmico autônomo que varia lentamente no tempo. Nesta transformação, o tempo  $t$  é eliminado explicitamente do sistema dinâmico, o que reduz sua dimensionalidade, tornando-o mais simples.

Para obter as soluções da Eq. (2.7) de uma forma aproximada pelo método da média, reescrevemos a Eq. (2.7) da seguinte forma

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\Omega x(t) - \gamma \dot{x}(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t), \quad (2.13)$$

em que  $\Omega = 1 - \omega^2 \approx O(\epsilon)$ . Essa forma é agora adequada para aplicarmos o método da média. A seguir, reescrevemos a Eq. (2.7) na forma de um sistema de equações diferenciais,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x(t) + f(x, y, t), \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde  $f(x, y, t) = -\Omega x(t) - \gamma y + F_p \cos(2\omega t)x(t)$ . Ao introduzirmos a seguinte transformação

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & -\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(t) \\ V(t) \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

na Eq. (2.14), encontramos

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & -\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, y, t) \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

que pode ser colocada na forma lentamente variante no tempo

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{V} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x, y, t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\omega} \sin(\omega t) f(x, y, t) \\ -\frac{1}{\omega} \cos(\omega t) f(x, y, t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Desse modo, aplicando o método da média em primeira ordem obtemos

$$\begin{pmatrix} \langle \dot{U} \rangle \\ \langle \dot{V} \rangle \end{pmatrix} = -\frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} \langle \sin(\omega t) f(x, y, t) \rangle \\ \langle \cos(\omega t) f(x, y, t) \rangle \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

em que  $\langle \cdot \rangle$  significa uma média temporal no período  $T = 2\pi/\omega$ . Assim obtemos o sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs)

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\omega} \left[ \gamma\omega u + \left( \frac{F_p}{2} + \Omega \right) v \right], \quad (2.19)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{2\omega} \left[ \left( \frac{F_p}{2} - \Omega \right) u + \gamma\omega v \right], \quad (2.20)$$

onde  $U(t)$  e  $V(t)$  foram substituídas por suas respectivas médias  $u(t)$  e  $v(t)$ . Resolvendo as Eqs. (2.19) e (2.20) obtemos soluções do tipo

$$u(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ u_0 \cosh(\kappa t) + \left( \frac{B - \eta}{\kappa} \right) v_0 \sinh(\kappa t) \right], \quad (2.21)$$

$$v(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \left[ v_0 \cosh(\kappa t) + \left( \frac{B + \eta}{\kappa} \right) u_0 \sinh(\kappa t) \right], \quad (2.22)$$

sendo  $\kappa = \sqrt{B^2 - \eta^2}$ , onde  $B = -F_p/4\omega$  e  $\eta = \Omega/2\omega$ . Para  $t = 0$  temos  $u_0$  e  $v_0$ , de modo que a partir da Eq. (2.23) obtemos

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

que ao substituirmos nas Eqs. (2.21) e (2.22), encontramos que

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{-\frac{\gamma}{2}t} \begin{pmatrix} \cosh(\kappa t) & -\frac{1}{\omega} \left( \frac{B - \eta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa t) \\ \left( \frac{B + \eta}{\kappa} \right) \sinh(\kappa t) & -\frac{1}{\omega} \cosh(\kappa t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$



Dessa expressão podemos facilmente mostrar que a linha de transição para a primeira zona de instabilidade paramétrica é dada por

$$(\gamma\omega)^2 = \left(\frac{F_p}{2}\right)^2 - \Omega^2. \quad (2.25)$$

Esse resultado é idêntico ao obtido na seção anterior pelo método do balanço harmônico. Nós o rederivamos pelo método da média como uma forma didática de mostrar como se aplica esse método. Em geral, para esses dois métodos dão os mesmos resultados para soluções periódicas. Na Fig. 2.1 apresentamos a linha de transição para a primeira instabilidade paramétrica analítica em primeira ordem de aproximação pelo método do balanço harmônico (ou média) com o resultado numérico. Nessa figura o coeficiente de dissipação  $\gamma$  é zero. Vemos que o analítico aproximado se aproxima mais do resultado exato numérico quando a dessintonia é menor. À medida que a dessintonia  $\Omega$  e a amplitude de bombeamento  $F_p$  aumentam, a aproximação fica pior. Isso é esperado, pois nesse caso  $\epsilon$  aumenta e, portanto, precisamos de mais termos para a série perturbativa convergir.

Na Fig. 2.2 novamente comparamos a linha de transição entre as zonas estável e instável do OPF obtida pelo método do balanço harmônico em primeira aproximação e pela integração numérica, mostrando que existe uma boa concordância entre as curvas na região da primeira ressonância paramétrica em torno de  $\omega = 1$ . Aqui o limiar de instabilidade é maior do que no caso sem dissipação como se esperava. Neste caso a estabilidade da região estável significa que a solução quiescente apresenta tanto estabilidade de Lyapunov quanto estabilidade assintótica [16], enquanto no caso com  $\gamma = 0$  somente há estabilidade de Lyapunov na região estável, ou seja, qualquer perturbação da solução quiescente não converge para solução quiescente, mas mantém-se sempre próxima a ela se o valor inicial for próximo.

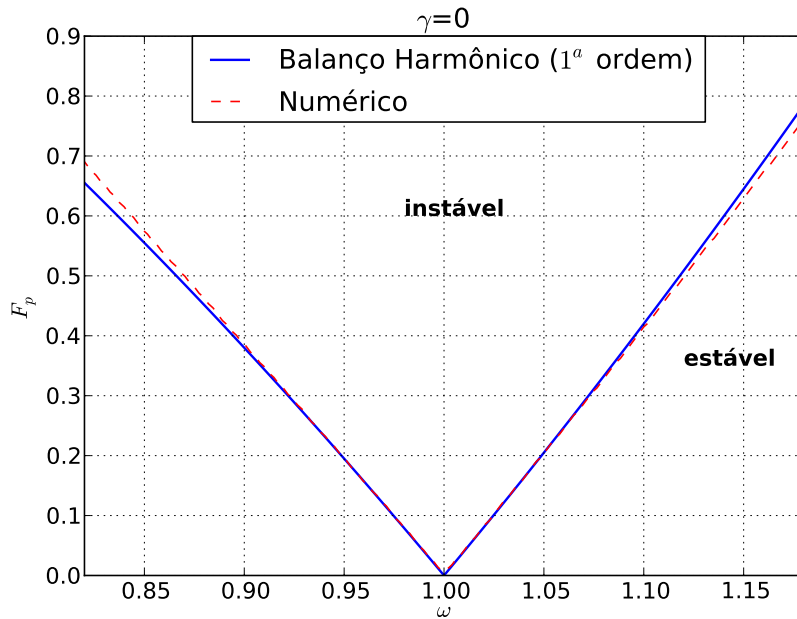


Figura 2.1: Comparação entre a previsão pelo método do balanço harmônico do resultado obtido na Eq. (2.12) e a integração numérica da Eq. (2.7) da linha de transição entre a zona estável e instável do OPF próximo a região de ressonância paramétrica quando fizemos  $\gamma = 0.0$ .

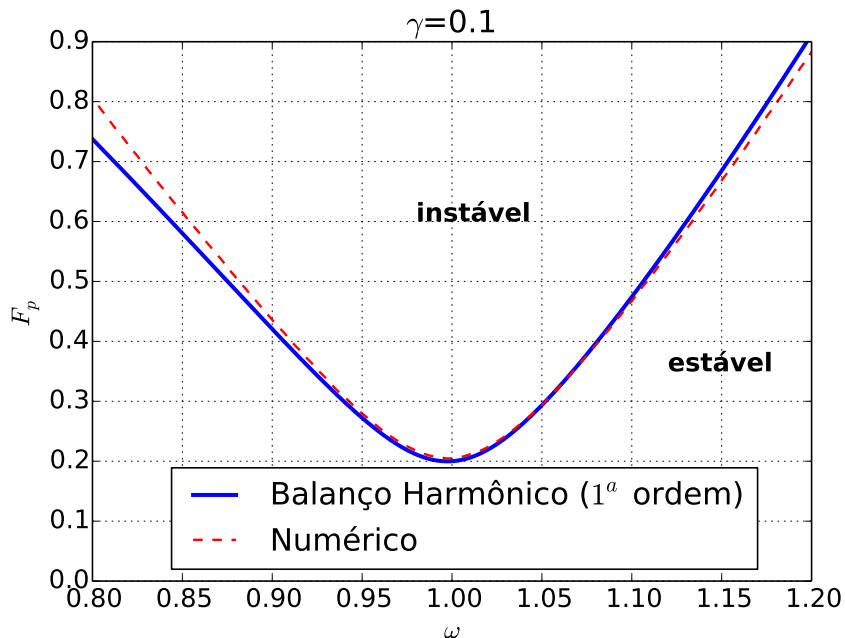


Figura 2.2: Comparação entre a previsão pelo método do balanço harmônico do resultado obtido na Eq. (2.12) e a integração numérica da Eq. (2.7) da linha de transição entre a zona estável e instável do OPF próximo a região de ressonância paramétrica.

## 2.5 Função de Green

Na matemática, uma função de Green é um tipo de função usada como sendo um núcleo de um operador linear integral na resolução de EDO não homogêneas com condições de contorno específicas. A equação para a função de Green do OPF é dada por [24]

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 1 + \gamma \frac{\partial}{\partial t} - F_p \cos(2\omega t) \right] G(t, t') = \delta(t - t'). \quad (2.26)$$

Como estamos interessados nas zonas estáveis do oscilador paramétrico, para  $t < t'$ ,  $G(t, t') = 0$  e ao integrarmos a equação acima perto de  $t = t'$ , obtemos as condições iniciais quando  $t = t' + 0^+$ ,  $G(t, t') = 0$  e  $(\partial/\partial t)G(t, t) = 1, 0$  [21].

Resolvendo o sistema de equações diferenciais acopladas dado pelas Eqs. (2.19) e (2.20), onde para  $t = t'$  temos  $u(t') = -\frac{\text{sen}(\omega t')}{\omega}$  e  $v(t') = -\frac{\text{cos}(\omega t')}{\omega}$  e obtemos a matriz fundamental dada por

$$e^{A(t-t')} = e^{-\gamma(t-t')/2} \begin{pmatrix} \cosh(\kappa(t-t')) & \left(\frac{B-\eta}{\kappa}\right) \sinh(\kappa(t-t')) \\ \left(\frac{B+\eta}{\kappa}\right) \sinh(\kappa(t-t')) & \cosh(\kappa(t-t')) \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

A função de Green aproximada é dada por

$$\begin{aligned} G(t, t') \approx & e^{-\gamma(t-t')/2} \left[ \cos(\omega t) \left( -\frac{1}{\omega} \cosh(\kappa(t-t')) \text{sen}(\omega t') - \frac{B-\eta}{\kappa\omega} \sinh(\kappa(t-t')) \cos(\omega t') \right) \right. \\ & \left. + \text{sen}(\omega t) \left( \frac{B+\eta}{\kappa\omega} \sinh(\kappa(t-t')) \text{sen}(\omega t') + \frac{1}{\omega} \cosh(\kappa(t-t')) \cos(\omega t) \right) \right] \end{aligned} \quad (2.28)$$

que satisfaz a Eq. (2.26) para  $t > t'$  e  $G(t, t') = 0$  para  $t < t'$ . Na zona de estabilidade do OPF, quando  $|B| < |\eta|$ , reescrevemos a função de Green e usando identidades trigonométricas encontramos

$$\begin{aligned} G(t, t') \approx & \frac{1}{\omega} e^{-\gamma(t-t')/2} \left\{ \cos[|\kappa|(t-t')] \text{sen}[\omega(t-t')] + \frac{\eta}{|\kappa|} \text{sen}[|\kappa|(t-t')] \cos[\omega(t-t')] \right. \\ & \left. - \frac{B}{|\kappa|} \text{sen}[|\kappa|(t-t')] \cos[\omega(t-t')] \right\}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ao realizarmos a troca de variável  $t' = t - \tau$ , a equação acima se torna

$$\begin{aligned} G(t, t - \tau) \approx & \frac{1}{\omega} e^{-\frac{\gamma}{2}\tau} \left\{ \cos(|\kappa|\tau) \text{sen}(\omega\tau) + \frac{\eta}{|\kappa|} \text{sen}(|\kappa|\tau) \cos(\omega\tau) \right. \\ & \left. - \frac{B}{|\kappa|} \text{sen}(|\kappa|\tau) [\cos(2\omega t) \cos(\omega t) + \text{sen}(2\omega t) \text{sen}(\omega t)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Quando  $F_p = 0$  e  $\omega = \omega_0$ , nós obtemos

$$G(t, t') \approx \frac{1}{\omega_0} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-t')} \text{sen}[\omega_0(t-t')]. \quad (2.31)$$

Nos quadros apresentados na Fig. 2.3 são mostradas algumas funções de Green com tempos iniciais. As funções foram espaçadas verticalmente de maneira homogênea em um período  $\pi/\omega$  e são assintoticamente nulas quando  $t \rightarrow \infty$ .

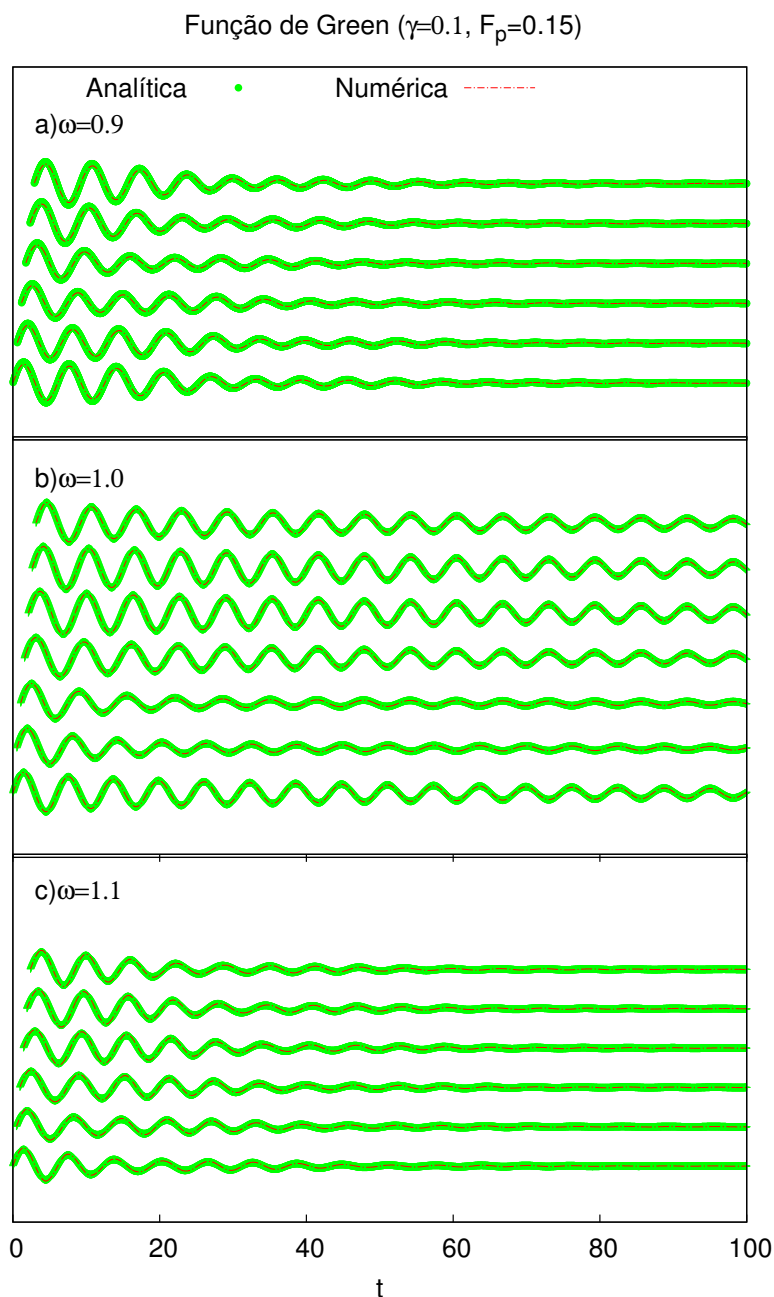


Figura 2.3: Fixamos os parâmetros  $F_p$ ,  $\gamma$  e  $\omega_0$  de modo que comparamos o resultado fornecido pela integração numérica da Eq. (2.7) com os resultados analíticos dado pela Eq. (2.27). As condições iniciais da função de Green quando  $t = t' + 0^+$  são dadas por  $G(t, t') = 0$  e  $(\partial/\partial t)G(t, t') = 1, 0$ .

## 2.6 Conclusão

A revisão sobre ressonância paramétrica apresentada neste capítulo foi basicamente para tornar essa dissertação mais completa e para que os resultados apresentados aqui

servam de referência nos próximos capítulos.

A ressonância paramétrica é um fenômeno amplamente investigado em vários tipos de sistemas dinâmicos. Sua característica básica é a transição para região de instabilidade, o que não ocorre nos OHFs. Nesse capítulo, encontramos a linha de transição para instabilidade paramétrica do OPF pelos métodos da média e do balanço harmônico, e numericamente também. Quando a frequência de bombeamento é em torno do dobro da frequência natural do OPF, a amplitude de bombeamento necessária para atingirmos a instabilidade paramétrica é menor do que quando não há essa sintonia. Obtivemos também neste capítulo uma aproximação perturbativa para a função de Green do OPF e mostramos comparações entre os resultados obtidos analiticamente e numericamente. Tal função de Green é especialmente relevante quando o OPF é também forçado por uma externa qualquer, que pode ser desde um ruído, um sinal ac que se quer amplificar, uma onda com modulação de fase, etc.

## Amplificação Paramétrica

Neste capítulo, estudamos o oscilador parametricamente forçado (OPF) excitado por um pequeno sinal harmônico externo. Nesta situação, o OPF é chamado de amplificador paramétrico (AP). Quando a amplitude da resposta ao sinal externo harmônico (ou ac) é maior que a amplitude desse sinal ac dizemos que há ganho e que há, portanto, amplificação. Essa amplificação pode ser medida em relação à amplitude do sinal externo ou em relação à amplitude da resposta de um amplificador de referência padrão. No presente estudo, o amplificador de referência escolhido é o OHF, que é simplesmente o AP sem bombeamento.

Veremos a seguir que o ganho da resposta ao sinal externo no AP é dependente da fase entre o sinal externo e o bombeamento. Dizemos então que o AP é um amplificador sensível à fase. Sendo esta uma característica bastante interessante dos APs, tal característica inexistente no OHF. Além da dependência de fase, a AP depende também da amplitude de bombeamento, da frequência de bombeamento e da frequência do sinal externo.

O AP pode ser bombeado em sintonia ou fora de sintonia com a frequência de bombeamento do oscilador interno sobre o qual o AP é baseado. Quando a frequência do sinal externo é igual à metade da frequência do bombeamento, diz-se que o AP é degenerado. Quando o AP não é degenerado, aparecem dois picos na transformada de Fourier da resposta do AP. Um pico é chamado de sinal, pois tem a mesma frequência do sinal externo, e o outro pico é chamado de idler, que surge da interação entre o bombeamento e a resposta ao sinal externo. No AP, o pico do idler está situado simetricamente oposto ao pico do sinal externo em relação à metade da frequência de bombeamento.

Na seção 3.1 calculamos analiticamente o ganho para a AP degenerada pelo método da média, os resultados são apresentados conjuntamente com os respectivos valores obtidos de integração numérica. Na seção 3.2 investigamos a AP não degenerada de pequenos sinais periódicos pelos métodos da média e do balanço harmônico. Obtemos séries temporais e suas respectivas transformadas de Fourier numericamente. Plotamos as séries

temporais com suas envelopes obtidas analiticamente. As transformadas de Fourier numéricas foram plotadas conjuntamente com os valores de pico previstos analiticamente. Excelentes concordâncias foram obtidas entre os dois métodos.

### 3.1 Amplificação Paramétrica degenerada - Método da Média

Nesta seção iremos considerar uma força  $F_s \cos(\omega t + \varphi_0)$  que será inserida na Eq. (2.7) do OPF, sendo a nova equação dada por

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + [1 - F_p \cos(2\omega t)]x(t) = F_s \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (3.1)$$

onde  $\omega_s$  é a frequência do sinal e  $\varphi_0$  é a fase do sinal a ser amplificado.

Para utilizarmos o método da média, reescrevemos a Eq. (3.1) com notação adequada  $\ddot{x} + \omega^2 x = -\Omega x - \gamma \dot{x} + F_p \cos(2\omega t)x + F_s \cos(\omega_s t + \varphi_0)$ . Em seguida, reescrevemos esta equação na forma  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -\omega^2 x + f_1(x, y, t)$ , onde  $f_1(x, y, t) = -\Omega x - \gamma \dot{x} + F_p \cos(2\omega t)x + F_s \cos(\omega_s t + \varphi_0)$ .

Agora podemos escrever a equação acima variando lentamente com o tempo, onde aplicamos o método da média dado pela Eq. (2.18) e filtramos os termos que oscilam em  $2\omega$  e  $4\omega$  de modo que obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \gamma\omega & \Omega + \frac{F_p}{2} \\ -\Omega + \frac{F_p}{2} & \gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \frac{F_s}{2\omega} \begin{pmatrix} \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

sendo  $U(t)$  e  $V(t)$  foram substituídas pelas médias  $u(t)$  e  $v(t)$ . Desse modo, fazendo  $\dot{u} = \dot{v} = 0$ , o ponto fixo da Eq. (3.2) será dado por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{F_s}{\Omega^2 + (\gamma\omega)^2 - (F_p/2)^2} \begin{pmatrix} \gamma\omega & -(\Omega + \frac{F_p}{2}) \\ (\Omega - \frac{F_p}{2}) & \gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{F_s}{\Omega^2 + (\gamma\omega)^2 - (F_p/2)^2} \begin{pmatrix} \gamma\omega \sin(\varphi_0) + (\Omega + \frac{F_p}{2}) \cos(\varphi_0) \\ (\Omega - \frac{F_p}{2}) \sin(\varphi_0) - \gamma\omega \cos(\varphi_0) \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Podemos agora calcular o ganho da AP do sinal, sendo este dado pelo logaritmo da razão entre a amplitude da força externa ac com excitação paramétrica com a resposta da amplitude quando não temos excitação paramétrica. Obtemos o ganho [25] por meio



de três métodos: o da média, o do balanço harmônico e o numérico, que é dado por

$$G(\varphi_0) = 20 \log_{10} \frac{X}{X_{F_p=0}}, \quad (3.4)$$

sendo  $X = \sqrt{u^2 + v^2}$ . Rugar e Grütter [13] estudaram a AP de maneira experimental e pelo método perturbativo. Os resultados teóricos concordaram bem com seus dados experimentais, e em nossa pesquisa aumentamos a amplificação aplicável para pequenos sinais, utilizando o método da média, permitindo a dessintonia. De maneira explícita, o ganho é dado por

$$G(\varphi_0) = 10 \log_{10} \left\{ \frac{[(\gamma\omega)^2 + \Omega^2] \{(\gamma\omega)^2 + \Omega^2 + F_p^2/4 + F_p[\Omega \cos(2\varphi_0) + \gamma\omega \sin(2\varphi_0)]\}}{[(\gamma\omega)^2 + \Omega^2 - F_p^2/4]^2} \right\} \quad (3.5)$$

onde o termo do denominador corresponde a linha de transição para a instabilidade paramétrica do OPF [13]. O ganho é sensível a fase e a dessintonia da frequência, podendo divergir na linha de transição da primeira zona de instabilidade paramétrica.

É possível ver na Fig. 3.1 que o ganho da AP tem sensibilidade na fase. Na maioria das fases o ganho é positivo, quando a resposta do AP é maior que a resposta do OHF, que ocorre quando o coeficiente de dissipação efetivo é menor que o coeficiente de dissipação  $\gamma$  do oscilador harmônico. Em algumas fases o ganho é negativo, ocorrendo um amortecimento maior do que no caso do OHF. Há ainda os pontos em que o ganho é nulo, representando a resposta do oscilador paramétrico igual à do OHF.

Na Fig. 3.2, mostramos estimativas analíticas e resultados numéricos do ganho em função da amplitude de bombeamento  $F_p$ , para diferentes fases e dessintonias. Em todos os casos  $\omega = \omega_s$ . Como vimos antes, a dependência mais expressiva do ganho em relação à fase ocorre quando não há dessintonia entre o  $\omega$  e  $\omega_0 = 1$ .

A grande dependência do ganho do AP na fase nos mostra que esse amplificador pode ser utilizado para a transmissão de informação quando a dessintonia for nula ou quase nula. Com essa dependência na fase, percebe-se que o AP pode ser utilizado para decodificar sinais com modulação de fase como mostra a Fig. 3.3. Neste exemplo vemos que sinais com modulação de fase são transformados em sinais com modulação de amplitude. Nesse método de transmissão de dados a fase da portadora é modulada de acordo com os dados a serem transmitidos. Neste caso incluímos um exemplo com a modulação mais rápida possível, o que corresponde a uma sequência de dados binários do tipo ...10101010... Esse método apresenta algumas limitações, a primeira é que quanto maior for o ganho, maior será o tempo de comutação entre um estado e outro, havendo assim limitação na taxa de transmissão de dados. Esse maior tempo de comutação está relacionado com o inverso da parte real do menor expoente de Floquet que é dado por  $\gamma - 2\kappa$ , que pode ser obtido da função de Green aproximada dada na Eq. (2.30). Outra limitação é na largura de banda em frequência da AP, já que com dessintonia há uma diminuição no ganho e uma menor

dependência na fase.

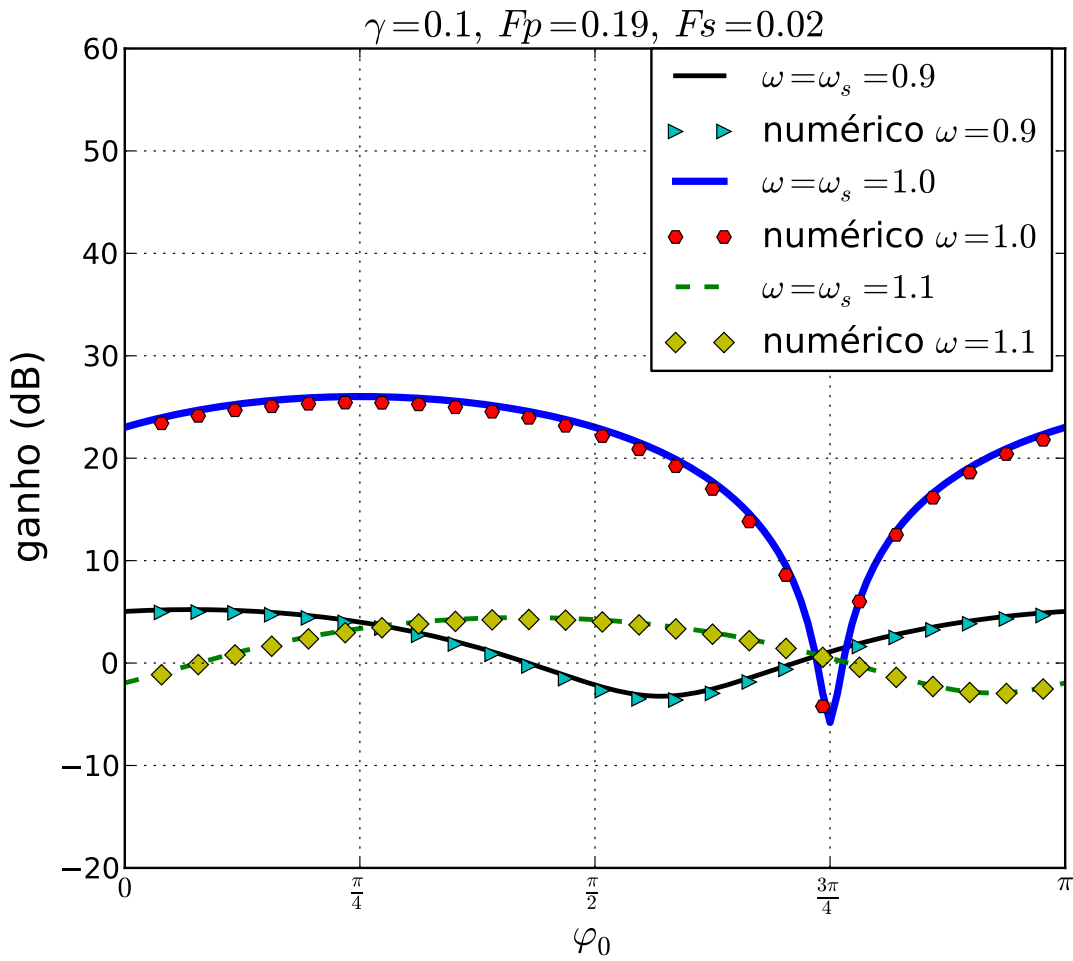


Figura 3.1: Estimativas analíticas e numéricas do ganho do amplificador paramétrico em relação à resposta do oscilador harmônico em função da fase. O ganho numérico foi obtido via integração numérica da Eq. (3.1) utilizando os valores estacionários de  $U(t)$  e  $V(t)$  quando  $t = 2n\pi/\omega$  na transformação definida na Eq. (2.15), tais valores foram substituídos na Eq. (3.4). O ganho analítico foi obtido pela Eq. (3.5).

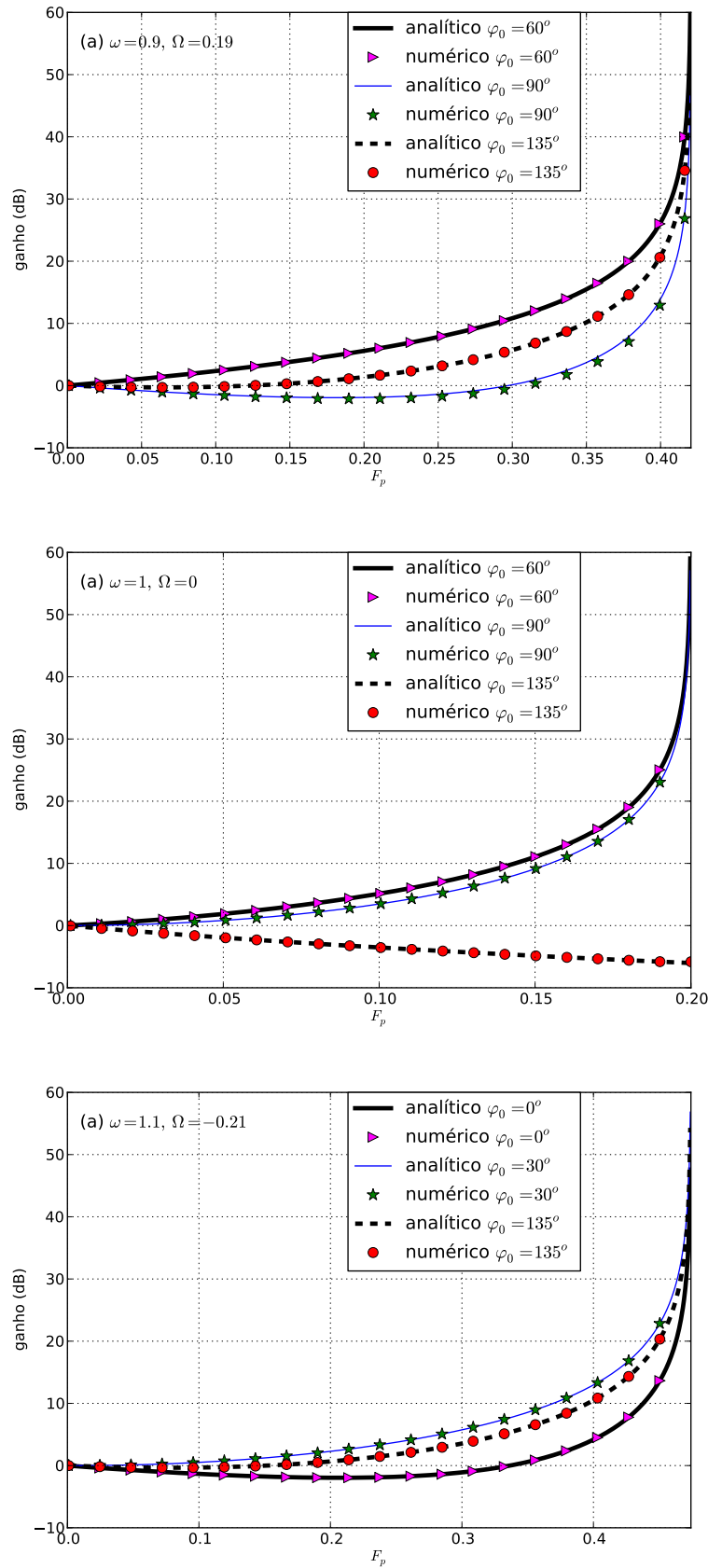


Figura 3.2: Estimativas numéricas e analíticas do ganho do amplificador paramétrico para a)  $\omega = 0.9$ , b)  $\omega = 1.0$  e c)  $\omega = 1.1$  em função do bombeamento  $F_p$  utilizando diferentes valores de  $\varphi_0$  e com o coeficiente de dissipação  $\gamma = 0.1$ . Os valores analíticos e numéricos de ganho foram obtidos da mesma forma que na Fig. 3.1.

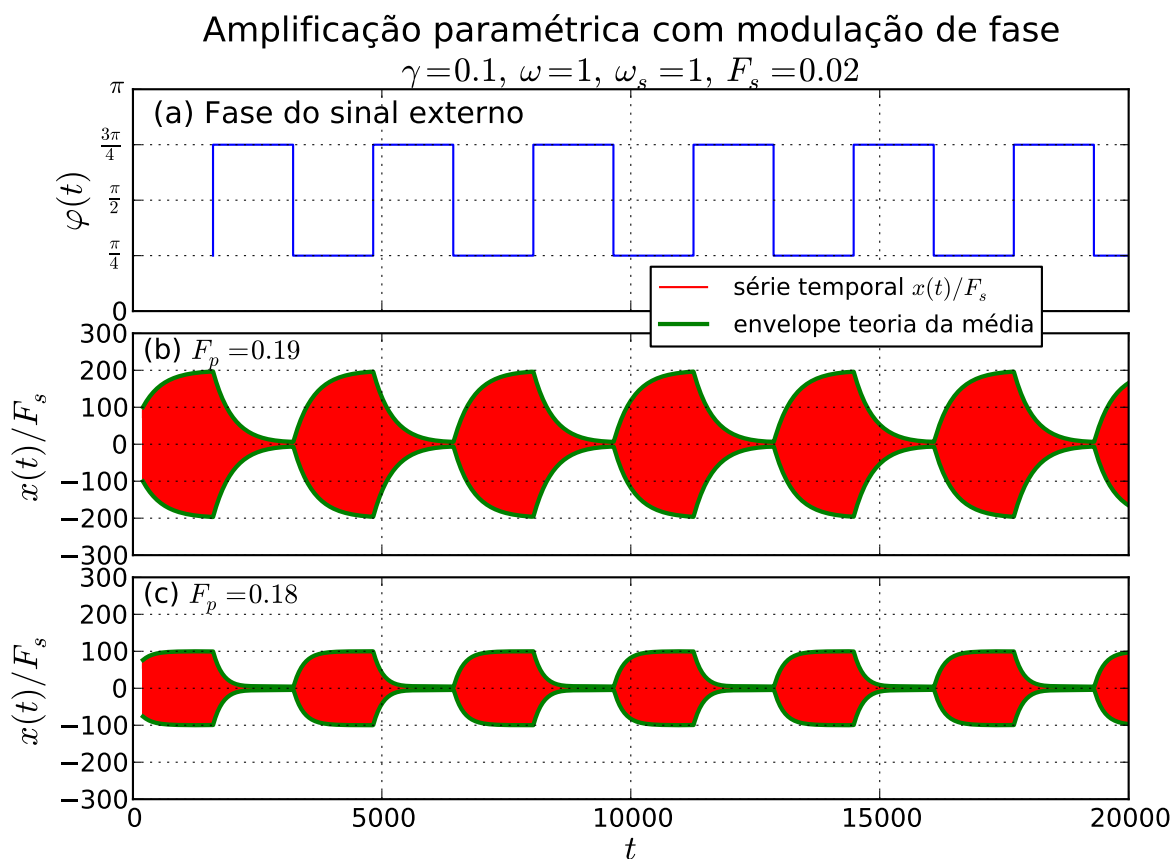


Figura 3.3: AP com modulação de fase do sinal externo do sistema descrito pela Eq. (3.1). No quadro a), apresentamos a fase em função do tempo, que é uma onda quadrada que alterna entre duas fases:  $\pi/4$  e  $3\pi/4$ . No quadro b), mostramos o ganho linear em função do tempo da resposta do AP em relação ao sinal de entrada. Os parâmetros da Eq.(3.1) utilizados são os mesmos da Fig. 3.1. Observamos que os ganhos máximo (46dB) e mínimo (14dB) da resposta do amplificador estão de acordo com as previsões da Fig. 3.1, às quais adicionamos os 20dB da amplificação do OHF. No quadro c), mostramos o ganho alternando entre os dois estados. O ganho, no entanto é menor, pois utilizamos  $F_p = 0.18$ . Por outro lado, observamos que a taxa de transmissão de dados pode ser maior, devido ao fato da parte real do expoente de Floquet mínimo ser maior.

## 3.2 Amplificação Paramétrica não-degenerada- Método da Média

Nesta seção iremos estudar a AP de uma força  $F_s \cos(\omega_s t + \varphi_0)$ , que será inserida na Eq. (2.7), sendo a nova equação dada por

$$\ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + [1 - F_p \cos(2\omega t)]x(t) = F_s \cos(\omega_s t + \varphi_0), \quad (3.6)$$

onde  $\varphi_0$  é a fase do sinal a ser amplificado.

Para utilizarmos o método da média, reescrevemos a Eq. (3.6) com notação adequada, onde  $\varphi(t) = \delta t + \varphi_0$  e  $\delta = \omega_s - \omega$ . Com esta substituição obtemos  $\ddot{x} + \omega^2 x = -\Omega x - \gamma \dot{x} + F_p \cos(2\omega t)x + F_s \cos(\omega t + \varphi(t))$ . Em seguida, reescrevemos esta equação na forma  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = -\omega^2 x + f_1(x, y, t)$ , onde  $f_1(x, y, t) = -\Omega x - \gamma \dot{x} + F_p \cos(2\omega t)x + F_s \cos(\omega t + \varphi(t))$ .

Agora transformamos a equação acima para uma forma que varia lentamente com o tempo, depois aplicamos o método da média como realizado na Eq. (2.18) e filtramos os termos que oscilam em  $2\omega$  e  $4\omega$  de modo que obtemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\omega} \left[ \gamma \omega u + \left( \Omega + \frac{F_p}{2} \right) v - F_s \sin \varphi(t) \right], \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\omega} \left[ \left( -\Omega + \frac{F_p}{2} \right) u + \gamma \omega v + F_s \cos \varphi(t) \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Na Fig. 3.4 mostramos a série temporal da AP para o OPF obtida numericamente a partir da Eq. (3.6) e a envelope correspondente obtida analiticamente do sistema autônomo aproximado dado pela Eq. (3.7). Vemos que as envelopes analíticas se ajustam muito bem às séries numéricas, indicando que a combinação dos métodos da teoria da média e do balanço harmônico descrevem bem a dinâmica do AP para frequências em torno da primeira frequência de ressonância paramétrica.

Na Fig. 3.5 plotamos as transformadas de Fourier correspondentes às séries temporais da Fig. 3.4. Em ambos os casos, tomamos cuidado em tomarmos intervalos de tempo longos em que condições de contorno periódicas fossem obedecidas, para evitar deslocamento e deformação dos picos. Observamos que as larguras finitas dos picos das transformadas de Fourier são consequência do tempo finito das séries temporais utilizadas. Quanto mais longas elas forem, mais estreitos serão esses picos. Esse fenômeno é o análogo clássico do princípio de incerteza de Heisenberg. Os resultados da teoria da média foram obtidos da série temporal  $x(t) = u(t) \cos(\omega t) - v(t) \sin(\omega t)$ , em que  $u(t)$  e  $v(t)$  obedecem ao sistema de EDO da Eq. (3.7). Novamente, observamos que existe excelente concordância entre os resultados numéricos e os analíticos.

Utilizando o método do balanço harmônico, assumimos que a solução estacionária do

sistema da Eq. (3.7) seja dada por

$$\begin{aligned} u(t) &= (\tilde{u}e^{i\delta t} + \tilde{u}^*e^{-i\delta t})/2, \\ v(t) &= (\tilde{v}e^{i\delta t} + \tilde{v}^*e^{-i\delta t})/2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

obtendo então o seguinte sistema algébrico

$$\begin{aligned} 2i\delta\omega\tilde{u} &= -\left\{ \gamma\omega\tilde{u} + \left( \Omega + \frac{F_p}{2} \right) \tilde{v} + iF_s e^{i\varphi_0} \right\}, \\ 2i\delta\omega\tilde{v} &= -\left\{ \left( -\Omega + \frac{F_p}{2} \right) \tilde{u} + \gamma\omega\tilde{v} + F_s e^{i\varphi_0} \right\}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Podemos reescrever esse sistema algébrico na seguinte forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = -\frac{F_s e^{i\varphi_0}}{4\omega} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

cujos coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} A &= i\delta + \gamma/2, \\ B &= (\Omega + F_p/2), \\ C &= (-\Omega + F_p/2), \\ D &= i\delta + \gamma/2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, obtemos que a solução para o sistema da Eq. (3.9) é dada por

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = -\frac{F_s e^{i\varphi_0}}{(AD - BC)} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

A resposta do oscilador da Eq. (3.6) pode ser escrita aproximadamente como

$$x(t) = u_s \cos[(\omega + \delta)t] - v_s \sin[(\omega + \delta)t] + u_i \cos[(\omega - \delta)t] - v_i \sin[(\omega - \delta)t], \quad (3.13)$$

onde  $u_s = \text{Re}[\tilde{u}] - \text{Im}[\tilde{v}]$ ,  $v_s = \text{Im}[\tilde{u}] + \text{Re}[\tilde{v}]$ ,  $u_i = \text{Re}[\tilde{u}] + \text{Im}[\tilde{v}]$  e  $v_i = -\text{Im}[\tilde{u}] + \text{Re}[\tilde{v}]$ . Os termos com frequência em  $\omega + \delta$  são conhecidos como sinal e os termos em  $\omega - \delta$  são conhecidos como *idler*. Assim, podemos conceber funções de ganho correspondentes. O ganho em decibéis do sinal do AP em relação à amplitude do sinal externo é definido como

$$G_s = 20 \log_{10} \frac{X_s}{F_s}, \quad (3.14)$$

onde  $X_s = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  é a amplitude do sinal para  $F_p \neq 0$ . O ganho em decibéis do *idler*

em relação à amplitude do sinal externo é definido como

$$G_i = 20 \log_{10} \frac{X_i}{F_s}, \quad (3.15)$$

onde  $X_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$ .

Na Fig. 3.6 plotamos os ganhos analíticos e numéricos do sinal dados pela Eq. (3.14) e do idler dados pela Eq. (3.15) e comparamos com o ganho do OHF para diferentes frequências e amplitudes de bombeamento. Quanto maior for o ganho da AP em relação ao ganho do oscilador OHF melhor será o amplificador. No quadro (a) vemos que há uma banda larga de ganho no sinal com dois picos e um deslocamento para o vermelho. No quadro (b) vemos que o ganho do sinal pode ser bem maior que o do OHF e bem mais estreito que este, como indicado pela região com ganho positivo. No quadro (c) vemos novamente uma banda larga de ganho no sinal com dois picos, mas com um deslocamento para o azul. Nos quadros (a) e (c), embora tenhamos amplitudes de bombeamento bem maiores que no quadro (b), os ganhos obtidos foram bem menores, o que evidencia que a AP é máxima no caso degenerado e em sintonia.

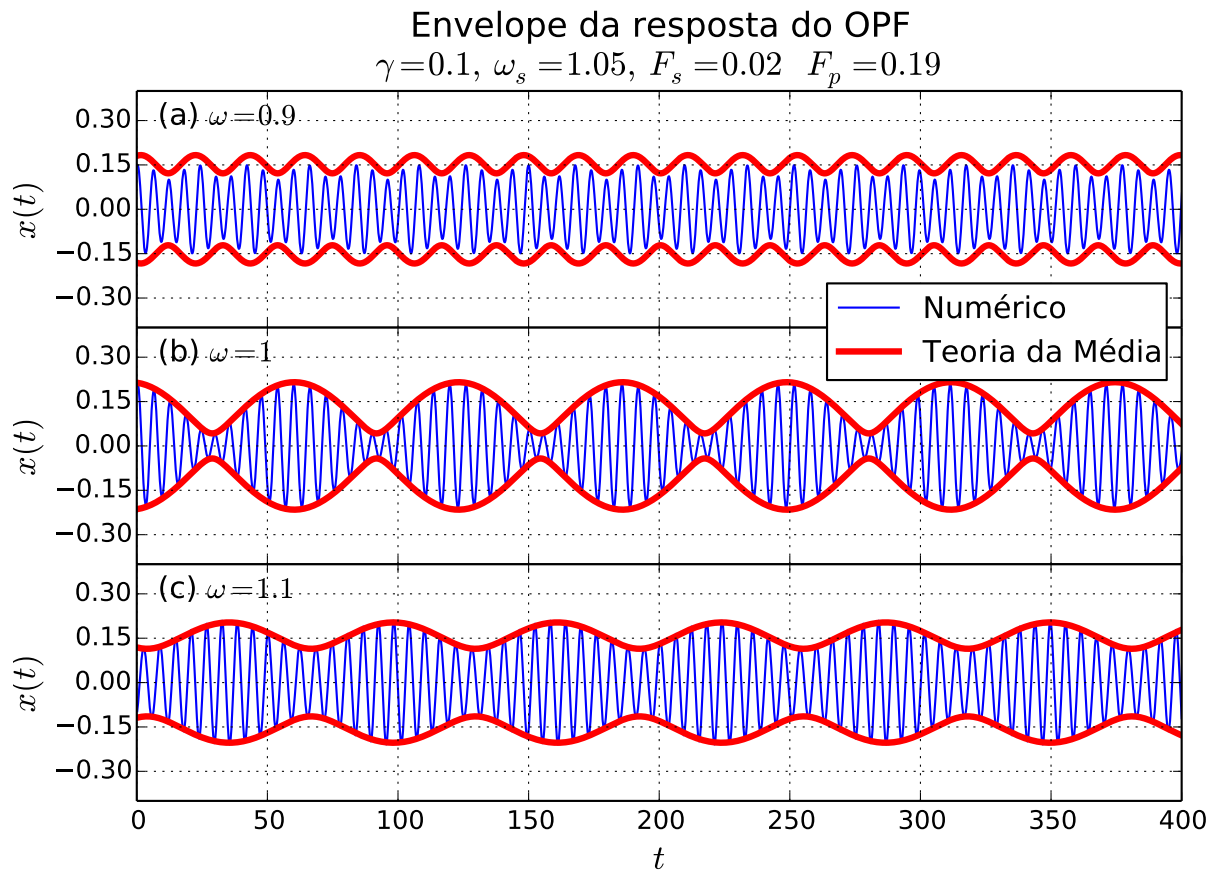


Figura 3.4: Séries temporais do AP obtidas da integração numérica da Eq. (3.6), enquanto as envelopes são dadas por  $\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$ , que obtemos da solução estacionária, Eq. (3.8), do sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (3.7) nas frequências  $\omega = 0.9$ ,  $\omega = 1$  e  $\omega = 1.1$ .



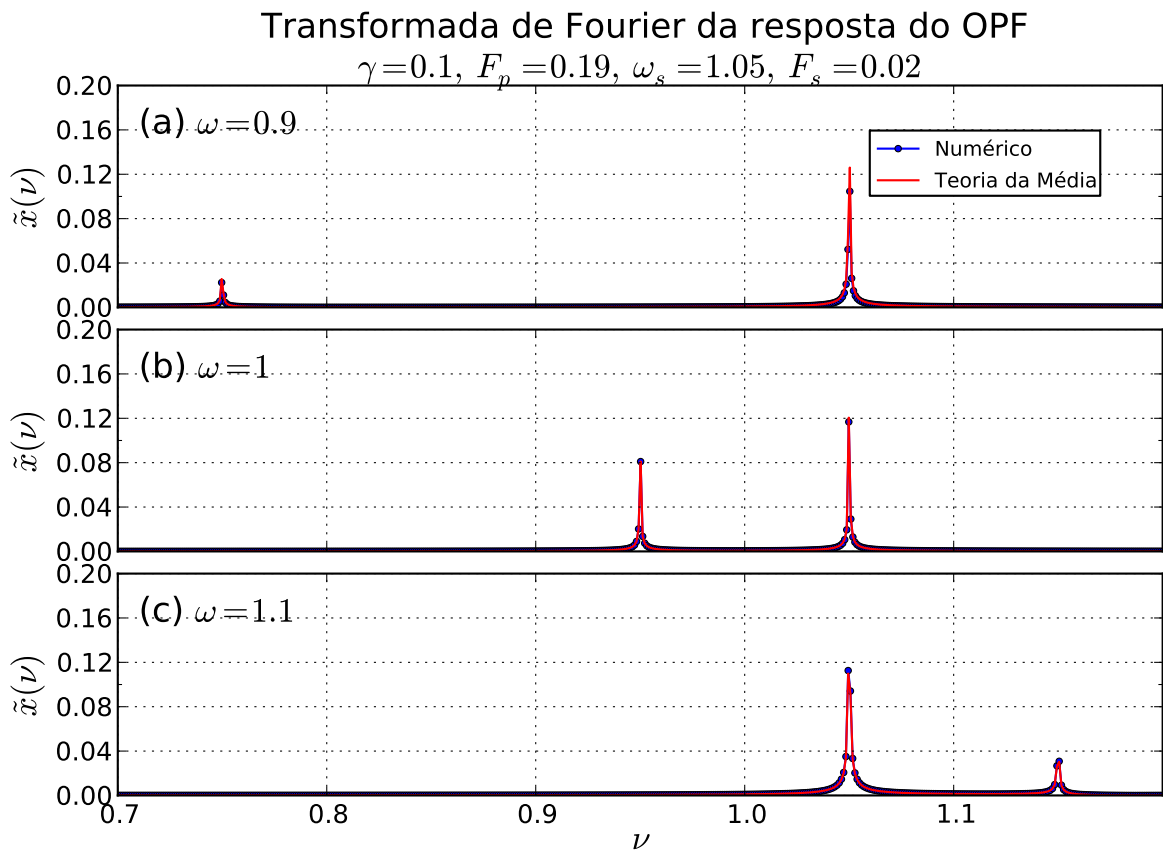


Figura 3.5: Transformadas de Fourier das séries temporais da Fig. 3.4 comparadas com os resultados analíticos obtidos a partir da Eq. (3.7).

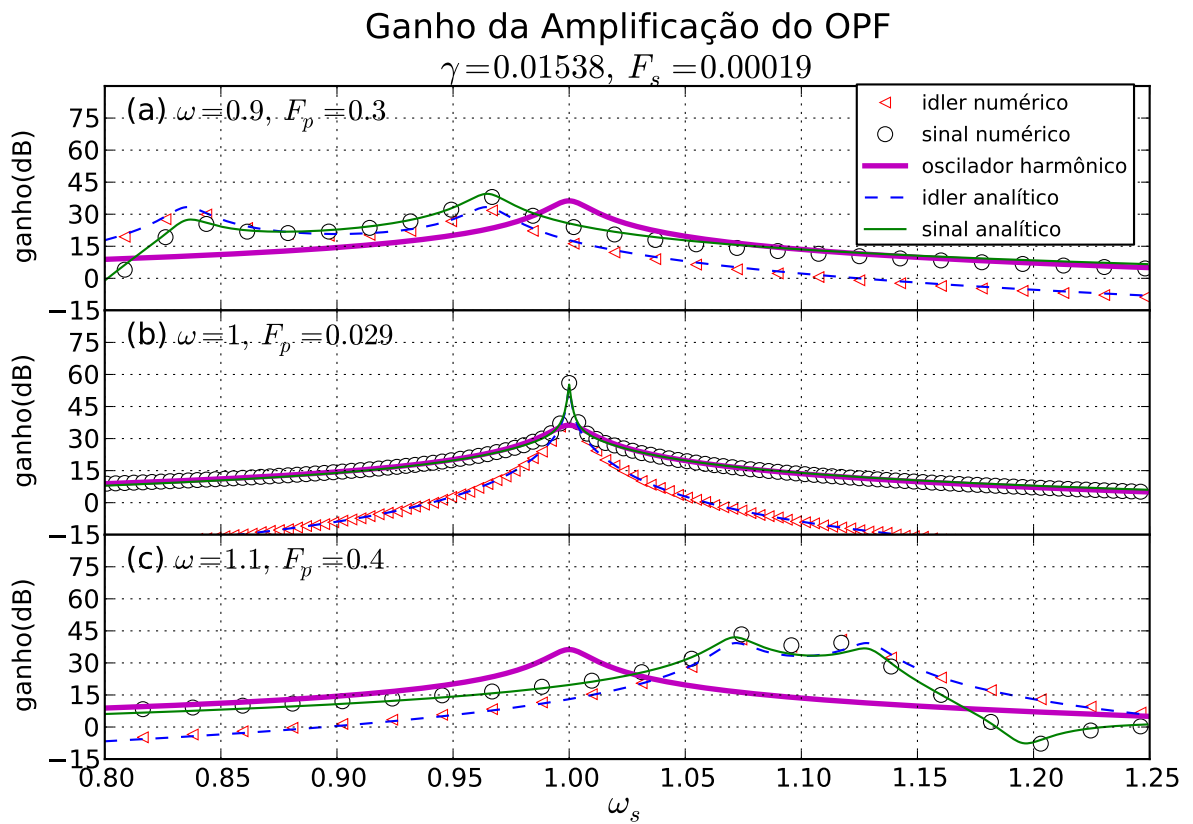


Figura 3.6: Comparação das respostas analíticas e numéricas do OPF (sinal e idler) dependendo da frequência do sinal externo  $\omega_s$  dadas pelas Eqs. (3.14) e (3.15) com a resposta do oscilador harmônico.

### 3.3 Conclusão

Investigamos a AP de sinais e verificamos que ela pode apresentar ganhos extremamente altos com largura de banda estreita e é sensível à fase. Vimos que as técnicas perturbativas da teoria da média e do balanço harmônico utilizadas foram muito boas para prever o comportamento do AP em diversas situações. Assim podemos utilizar essas ferramentas para nos guiar na seleção dos parâmetros para um comportamento desejável.

Do ponto de vista da análise temporal, vimos que a um sinal monocromático ( $ac$ ) de entrada, aditivamente acoplado, o AP gera normalmente um sinal de amplitude modulada (AM) na saída. A única exceção é o caso em que há sintonia entre a frequência do sinal  $ac$  e metade da frequência de bombeamento. Nesse caso não há modulação, no entanto, a amplitude do sinal de saída depende sensivelmente na fase entre o bombeamento e o sinal  $ac$  de entrada. A variação do ganho com a fase aumenta à medida em que se aumenta a amplitude de bombeamento até se chegar ao limiar da primeira zona de instabilidade. Nesse ponto o ganho se torna geralmente infinito. Por outro lado, vimos que quanto maior for a dessintonia entre a frequência do sinal de entrada e metade da frequência do bombeamento, maior é a frequência de modulação, menor é a amplitude da modulação, e em geral menor também será a amplitude da sinal de saída do AP.

Do ponto de vista da análise espectral, vimos que a resposta do AP ao sinal  $ac$  de entrada apresenta dois picos na sua transformada de Fourier. Um na mesma frequência do sinal de entrada que é chamado simplesmente de sinal e o outro pico, chamado de *idler*, situado diametralmente oposto ao pico do sinal, tendo a metade da frequência de bombeamento como centro de simetria. A presença desses dois picos é que leva ao fenômeno da AM. Vimos também que as amplitudes de ambos os picos depende da fase entre o sinal de entrada e o bombeamento interno.

Essas propriedades do AP, podem ser aproveitadas para a transmissão de informação através de sinais com modulação de fase. Os sinais recebidos são codificados pela modulação em amplitude. Tal método é limitado em taxa de transição de dados à medida em que se aproxima da região instável. O ótimo é determinado a partir do ganho máximo que se quer obter. Outra limitação desse método ocorre quando o sinal externo não está em sintonia com o bombeamento, nesse caso a fase vai ficar variando continuamente entre o sinal externo e o bombeamento, o que prejudicará a transmissão de dados. No entanto, correções periódicas na fase podem ser geradas para diminuir esse efeito de dessintonia.

# Ressonância Paramétrica em Osciladores Não-Lineares

Neste capítulo introduzimos termos não-lineares na equação de movimento do OPF. O objetivo é investigar o comportamento do oscilador na região de instabilidade, pois com a introdução dos termos não-lineares na equação de movimento eliminam-se as soluções divergentes e surgem soluções periódicas (ciclos limites atratores).

A não-linearidade mais simples de se introduzir, e que mantém o sistema com soluções finitas, é a que decorre da adição de um termo cúbico com coeficiente positivo, o que torna a mola mais rígida com o aumento da deflexão e dá origem a terceiros harmônicos nas soluções periódicas.

Na seção 4.1 investigamos quais tipos de soluções e bifurcações (entre a região quieta e a oscilatória) podem existir quando temos apenas uma não-linearidade cúbica na força restauradora, enquanto a excitação paramétrica é linear. Na seção 4.2 investigamos as soluções existentes ao adicionarmos dois termos de não-linearidade cúbica, um na força restauradora e outro na excitação paramétrica. Tais osciladores não-lineares são chamados na literatura de osciladores de Duffing parametricamente excitados. Na seção 4.3 apresentamos nossa conclusão deste capítulo.

## 4.1 Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 1

Nesta seção estudamos o Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado (ODPF), cuja equação de movimento é dada por

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = -\Omega x(t) - \gamma \dot{x}(t) - \alpha x^3(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t). \quad (4.1)$$

Reescrevemos a Eq. (4.1) na forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias  $\dot{x} = y$ ,  $\dot{y} = A$ , sendo  $A = -\omega^2 x(t) + f_2(x, y, t)$  e  $f_2(x, y, t) = -\Omega x(t) - \gamma y - \alpha x^3(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t)$ . Em seguida, de acordo com a técnica apresentada no capítulo 2, reescre-

vemos a equação acima em forma lentamente variante com o tempo e aplicamos o método da média, obtendo

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma\omega u + \left[ \Omega + \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) + \frac{F_p}{2} \right] v \right\}, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \left[ -\Omega - \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) + \frac{F_p}{2} \right] u + \gamma\omega v \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo  $u(t)$  e  $v(t)$  as variáveis que variam lentamente com o tempo. Os pontos fixos dessas equações diferenciais acopladas (4.2) são encontrados ao resolvermos o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} \gamma\omega u + \left( \Omega + \frac{3\alpha}{4}r^2 + \frac{F_p}{2} \right) v &= 0, \\ \left( \Omega + \frac{3\alpha}{4}r^2 - \frac{F_p}{2} \right) u - \gamma\omega v &= 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde  $u = r \cos \theta$  e  $v = r \sin \theta$ . Podemos reescrever o sistema dado na Eq. (4.3) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \gamma\omega & \Omega + \frac{3\alpha}{4}r^2 + \frac{F_p}{2} \\ \Omega + \frac{3\alpha}{4}r^2 - \frac{F_p}{2} & -\gamma\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Como desejamos encontrar uma solução não trivial desse sistema, temos que

$$(-\gamma^2\omega^2) - \left[ \left( \Omega + \frac{3\alpha}{4}r^2 \right)^2 - \frac{F_p^2}{4} \right] = 0, \quad (4.5)$$

de modo que obtemos os pontos fixos

$$\begin{aligned} r^* &= \left\{ \frac{4}{3\alpha} \left[ -\Omega \pm \left( \frac{F_p^2}{4} - \omega^2\gamma^2 \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}, \\ \text{sen}2\theta^* &= -\frac{2\gamma\omega}{F_p}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Portanto, podemos determinar  $\text{sen}\theta^*$  e  $\cos\theta^*$ , onde

$$\text{sen}\theta^* = \pm \left[ \frac{1 \pm \sqrt{1 - \left( \frac{2\gamma\omega}{F_p} \right)^2}}{2} \right]^{1/2}, \quad (4.7)$$

$$\cos \theta^* = \pm \left[ \frac{1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{2\gamma\omega}{F_p}\right)^2}}{2} \right]^{1/2}. \quad (4.8)$$

Uma vez que conhecemos os valores de  $r^*$ ,  $\sin\theta^*$  e  $\cos\theta^*$ , temos

$$\begin{aligned} u^* &= \pm \left\{ \frac{4}{6\alpha} \left[ -\Omega \pm \left( \frac{F_p^2}{4} - \omega^2\gamma^2 \right)^{1/2} \right] \left[ 1 \mp \left( 1 - \frac{4\gamma^2\omega^2}{F_p^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}, \\ v^* &= \pm \left\{ \frac{4}{6\alpha} \left[ -\Omega \pm \left( \frac{F_p^2}{4} - \omega^2\gamma^2 \right)^{1/2} \right] \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{4\gamma^2\omega^2}{F_p^2} \right)^{1/2} \right] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Essas equações nos informam quais tipos de soluções podemos obter. Soluções em que  $r^* > 0$  representam ciclos limites no ODPF 1, descrito pela Eq. (4.1), que são mostrados nas Figs. 4.1-4.3. O ciclo limite surge apenas nos sistemas não-lineares e corresponde ao estado estacionário do sistema quando a condição inicial for diferente da trivial. Nessas figuras plotamos séries temporais de  $x(t)$  e correspondentes transformadas de Fourier, tanto os valores obtidos numericamente quanto analiticamente pela teoria da média. Analisamos a resposta da amplitude do ODPF 1 antes, durante e depois do primeiro harmônico. Observamos que a diferença de amplitude entre as três respostas ocorre nas proximidades do primeiro harmônico, sendo a ordem de magnitude e o valor obtido no pico equivalente para cada  $\omega$  que utilizamos.

Utilizando o sistema de Eqs. (4.2), os pontos fixos ocorrem quando  $\dot{u} = 0$  e  $\dot{v} = 0$  simultaneamente. A matriz Jacobiana nos pontos  $(\bar{u}, \bar{v})$  é dada por

$$\begin{aligned} J = Df &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}_{(\bar{u}, \bar{v})}, \\ J &= -\frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \gamma\omega + \frac{3\alpha}{2}uv & \Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) + \frac{3\alpha}{2}v^2 \\ -\Omega + \frac{F_p}{2} - \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) - \frac{3\alpha}{2}u^2 & \gamma\omega - \frac{3\alpha}{2}uv \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Sendo  $|Df - \lambda I| = 0$ , o  $\det Df = 0$ , temos a bifurcação de ponto de sela (ou fold bifurcation).

Quando há dois tipos de soluções estáveis temos a região de biestabilidade. Na Fig. 4.4 representamos as regiões de estabilidade, instabilidade e biestabilidade no espaço de parâmetros  $(\omega, F_p)$ . Ocorrem bifurcações locais de codimensão 1 no ODPF 1 quando se muda a estabilidade de pontos fixos ao se variar um dos parâmetros do sistema (no nosso caso  $F_p$  ou  $\omega$ ) [26]. Nessa Fig. 4.4 ocorrem as bifurcações na linha de transição entre o regime

estável e o instável (Hopf supercrítica no sistema descrito pela Eq. (4.1) e forquilha no sistema descrito pelo sistema de Eqs. (4.2)). Na linha de transição da região estável para a biestável, descrita pela equação ( $F_p = 2\gamma\omega$ ), temos uma bifurcação sela-nó no sistema descrito pelas Eqs. (4.2). Na linha de transição da região biestável para a instável, temos uma bifurcação forquilha subcrítica (descrita pela equação ( $F_p = 2\sqrt{(\gamma\omega)^2 + \Omega^2}$ )).

No caso de existir somente a solução trivial ( $r^* = 0$ ), temos a região de estabilidade. Uma vez que  $u^*$  e  $v^*$  são soluções do sistema dado pela Eq. (4.3),  $-u^*$  e  $-v^*$  também serão soluções. Na Fig. 4.5 plotamos o diagrama de bifurcação do ODPF 1 associado ao sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (4.2) em função do bombeamento  $F_p$ .

Na Fig. 4.6 plotamos a amplitude da resposta do ODPF 1 em função do bombeamento  $F_p$  para podermos caracterizar os tipos de bifurcações que ocorrem. Comparamos os resultados numéricos obtidos da transformada de Fourier do pico nas frequências específicas com os valores de amplitude da solução analítica aproximada da pela Eq. (4.6). As linhas tracejadas mostram os pontos fixos instáveis e as linhas cheias os pontos fixos estáveis.

### ciclo limite do oscilador de Duffing

$$\alpha=0.1, \gamma=0.1, F_p=0.4, \omega=0.9375$$

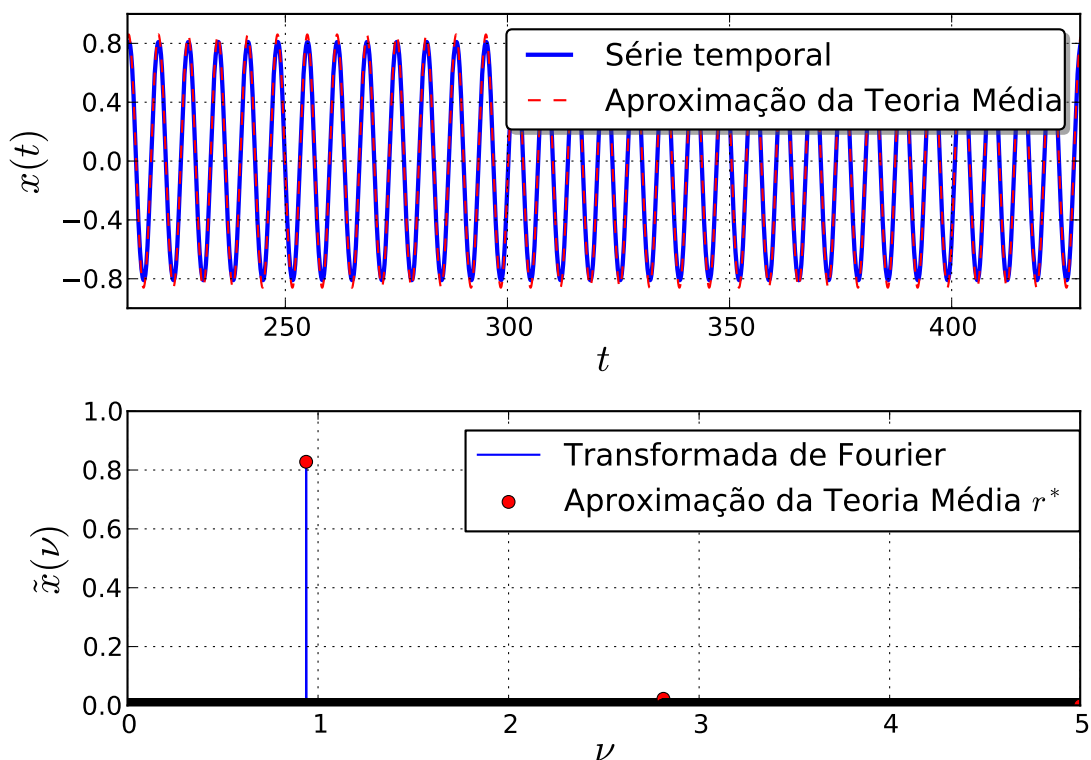


Figura 4.1: Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 1 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 0.9375$  e a aproximação da teoria da média dada por  $r^*$  da Eq. (4.6). Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.

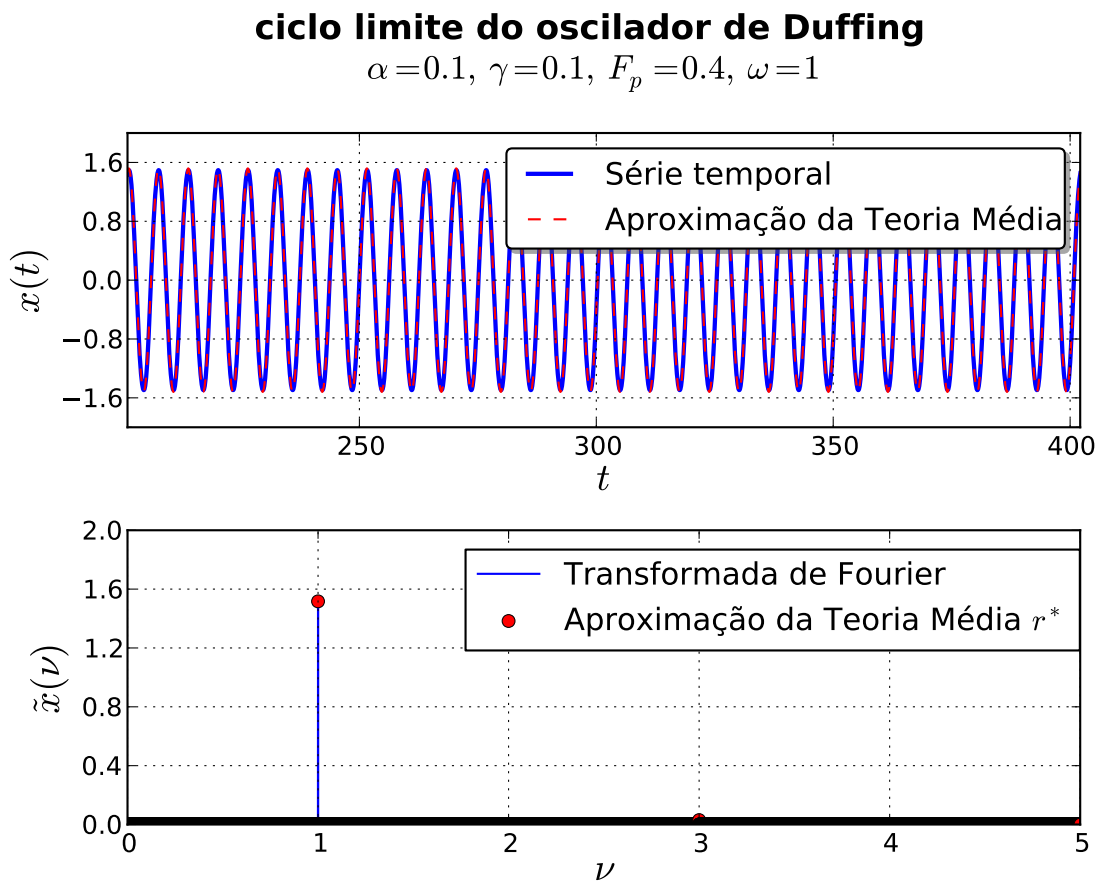


Figura 4.2: Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 1 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 1$  e a aproximação da teoria da média dada por  $r^*$  da Eq. (4.6). Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.



### ciclo limite do oscilador de Duffing

$$\alpha=0.1, \gamma=0.1, F_p=0.4, \omega=1.0625$$

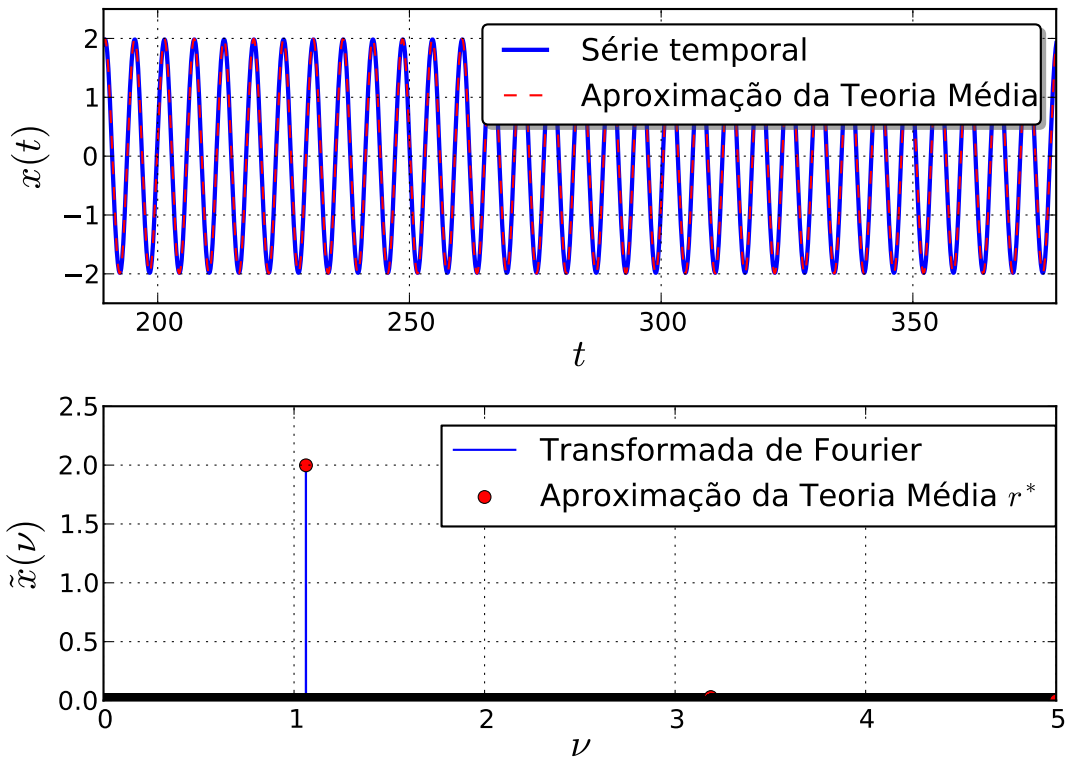


Figura 4.3: Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 1 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 1.0625$  e a aproximação da teoria da média dada por  $r^*$  da Eq. (4.6). Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.

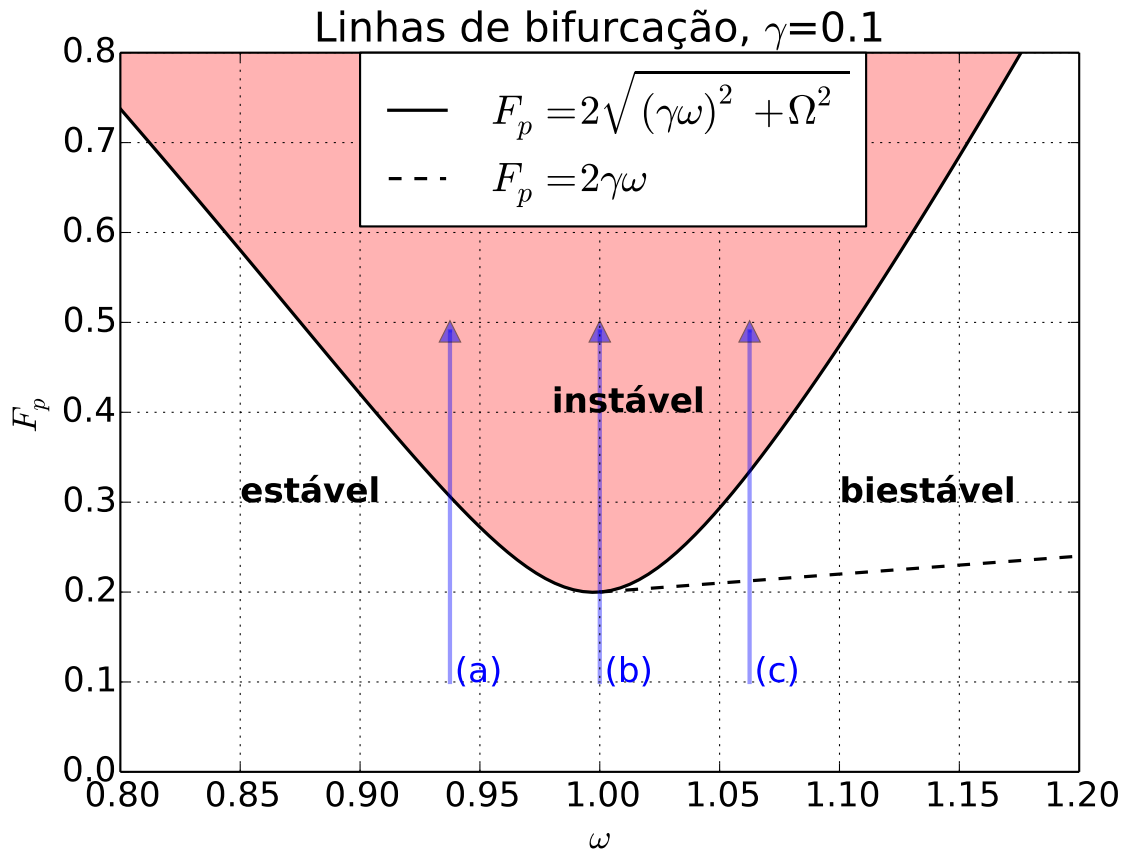


Figura 4.4: Diagrama das linhas de bifurcação do ODPF 1 obtido a partir da Eq. (4.6). São mostradas as linhas de transição entre os regimes estável-instável, estável-biestável e biestável-instável, associando para cada tipo de transição as bifurcações existentes. As regiões (a), (b) e (c) são mostradas na Fig. 4.5.

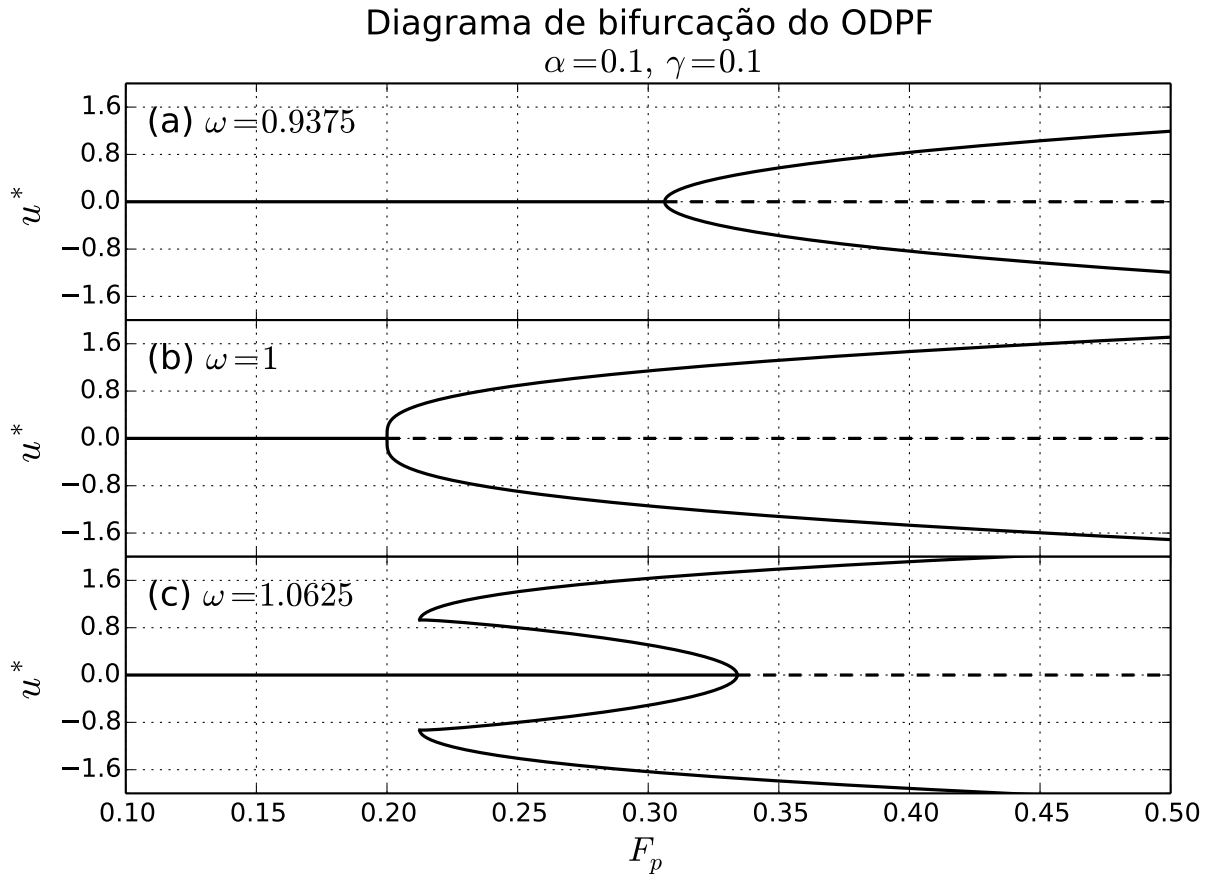


Figura 4.5: Diagrama de bifurcação do ODPF 1 associado ao sistema autônomo dado pela Eq. (4.2). No quadro (a) plotamos para  $\omega = 0.9375$ , mostrando que  $F_p$  entre 0.10 e 0.31 só um ponto é observado, o que corresponde ao ponto fixo estável. Quando  $F_p = 0.31$  ocorre uma bifurcação e a linha divide-se em duas, identificando assim a bifurcação forquilha supercrítica. No quadro (b) plotamos para  $\omega = 1$  mostrando que  $F_p$  entre 0.10 e 0.20 corresponde ao ponto fixo estável. Em  $F_p = 0.20$  ocorre a bifurcação de forquilha supercrítica. No quadro (c) plotamos para  $\omega = 1.0625$ , observando que  $F_p$  entre 0.10 e 0.22 corresponde ao ponto fixo estável e em  $F_p = 0.22$  temos a bifurcação sela-nó com um par de pontos fixos, sendo um estável e um instável. Observamos outro ponto fixo estável em  $F_p$  entre 0.10 e  $\cong 0.33$ . Quando  $F_p \cong 0.33$  temos a bifurcação de Hopf subcrítica.

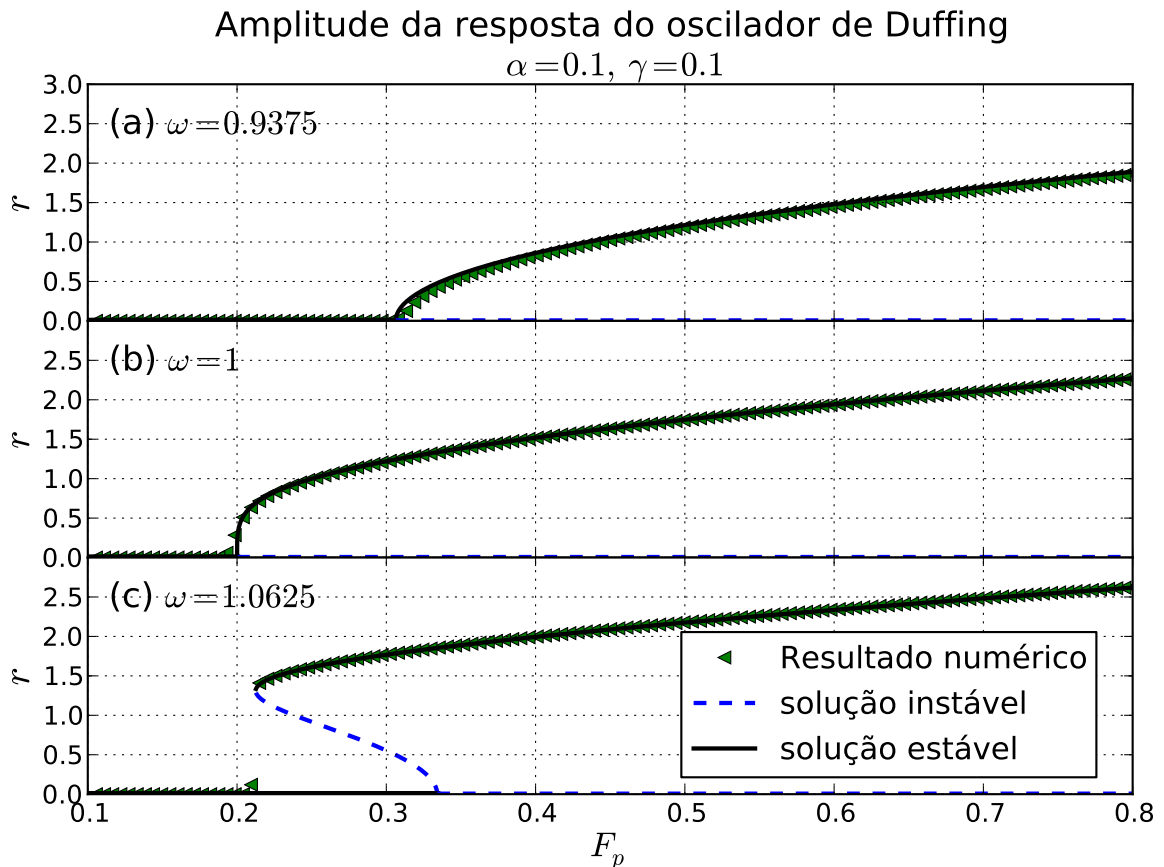


Figura 4.6: Amplitude da resposta do ODPF 1 em função da amplitude de bombeamento  $F_p$ . Comparamos o resultado numérico dado pelo valor de pico da transformada de Fourier nas frequências  $\omega = 0.9375$ ,  $\omega = 1$  e  $\omega = 1.0625$  com o resultado analítico da Eq. (4.6). No quadro (a) ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica em  $F_p = 0.32$  no sistema não-autônomo original da Eq. (4.1), enquanto no sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (4.2) ocorre uma bifurcação forquilha supercrítica, em  $F_p = 0.31$ . No quadro (b) também ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica (sistema não-autônomo) e uma bifurcação forquilha em  $F_p = 0.2$  (sistema aproximado). No quadro (c) ocorre em  $F_p \cong 0.33$  uma bifurcação de forquilha subcrítica no sistema aproximado e de Hopf subcrítica no sistema não-autônomo. Também ocorre uma bifurcação sela-nó, aproximadamente em  $F_p = 0.22$ , gerando um par de pontos fixos (um estável e outro instável) no sistema aproximado e um par de ciclos limites no sistema não-autônomo.

## 4.2 Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 2

Nesta seção, resolvemos o (ODPF 2), modelo este que se assemelha ao que foi proposto na Ref. [27], de modo que a equação de movimento é dada por

$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) - (x(t) + \alpha x^3(t)) + F_p \cos(2\omega t) [x(t) + \alpha x^3(t)]. \quad (4.10)$$

Reescrevemos a Eq. (4.10) na forma de um sistema de equações diferenciais,  $\dot{x}(t) = \dot{y}$ ,  $\dot{y} = A_2$ , sendo  $A_2 = -\omega^2 x(t) + f_3(x, y, t)$  e  $f_3(x, y, t) = -\gamma y - \Omega x(t) - \alpha x^3(t) + F_p \cos(2\omega t) [x(t) + \alpha x^3(t)]$  para aplicarmos o método da teoria da média. Em seguida, de acordo com a técnica apresentada no capítulo 2, reescrevemos a equação acima em forma lentamente variante com o tempo e aplicamos o método da média, obtendo as equações do movimento para as variáveis lentas  $u(t)$  e  $v(t)$

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma\omega u + \left[ \Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha v^2 + \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) \right] v \right\}, \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \left[ -\Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha u^2 - \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) \right] u + \gamma\omega v \right\}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Os pontos fixos dessas equações diferenciais acopladas (4.11) são encontrados ao resolvermos o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned} \gamma\omega u + \left[ \Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha v^2 + \frac{3\alpha}{4}r^2 \right] v &= 0, \\ \left[ -\Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha u^2 - \frac{3\alpha}{4}r^2 \right] u + \gamma\omega v &= 0, \end{aligned} \quad (4.12)$$

sendo  $r^2 = u^2 + v^2$ . Podemos reescrever o sistema dado pela Eq. (4.12) dividindo por  $u$  e fazendo  $z = \frac{v}{u}$ , para obtermos

$$\gamma\omega + \left( \Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{3\alpha}{4}r^2 + \frac{F_p}{2}\alpha v^2 \right) z = 0, \quad (4.13)$$

$$\left( -\Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha u^2 - \frac{3\alpha}{4}r^2 \right) + \gamma\omega z = 0. \quad (4.14)$$

Dividindo a Eq. (4.13) por  $z$  e em seguida somando com a Eq. (4.14), obtemos

$$r^2 = -\frac{2}{\alpha F_p} \left[ \gamma\omega \left( \frac{1}{z} + z \right) + F_p \right]. \quad (4.15)$$

Das equações (4.13)-(4.14) encontramos

$$z^2 = -\frac{\frac{\gamma\omega}{z} + \Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{3\alpha r^2}{4}}{\gamma\omega z - \Omega + \frac{F_p}{2} - \frac{3\alpha r^2}{4}}. \quad (4.16)$$

Observamos que, com ajuda da Eq. (4.15), a Eq. (4.16) se torna um polinômio de ordem 4 para  $z$ . Com a solução de  $z$  então obtemos  $r$ , e, conseqüentemente, os pontos fixos  $u^*$  e  $v^*$ .

Nas Figs. 4.7-4.9 plotamos as séries temporais de  $x(t)$  obtidas numericamente através da integração numérica da Eq. (4.10) e as comparamos com os resultados analíticos obtidos da teoria da média a partir das Eqs. (4.11). Apresentamos também as respectivas transformadas de Fourier, tanto numéricas quanto as analíticas. De modo equivalente ao ODPF 1, analisamos a resposta da amplitude do ODPF 2 para frequências de bombeamento em torno da primeira ressonância, quando  $\omega = 1$ . À medida que a frequência de bombeamento aumenta vemos que a amplitude da resposta  $x(t)$  aumenta, indicando um deslocamento para o azul da ressonância paramétrica.

Na Fig. 4.10 plotamos a amplitude da resposta do ODPF 2 em função da amplitude de bombeamento  $F_p$ . Os resultados numéricos foram obtidos do pico da transformada de Fourier (no fundamental), enquanto os valores de amplitude da solução analítica aproximada foram obtidos de pontos fixos da Eq. (4.11).

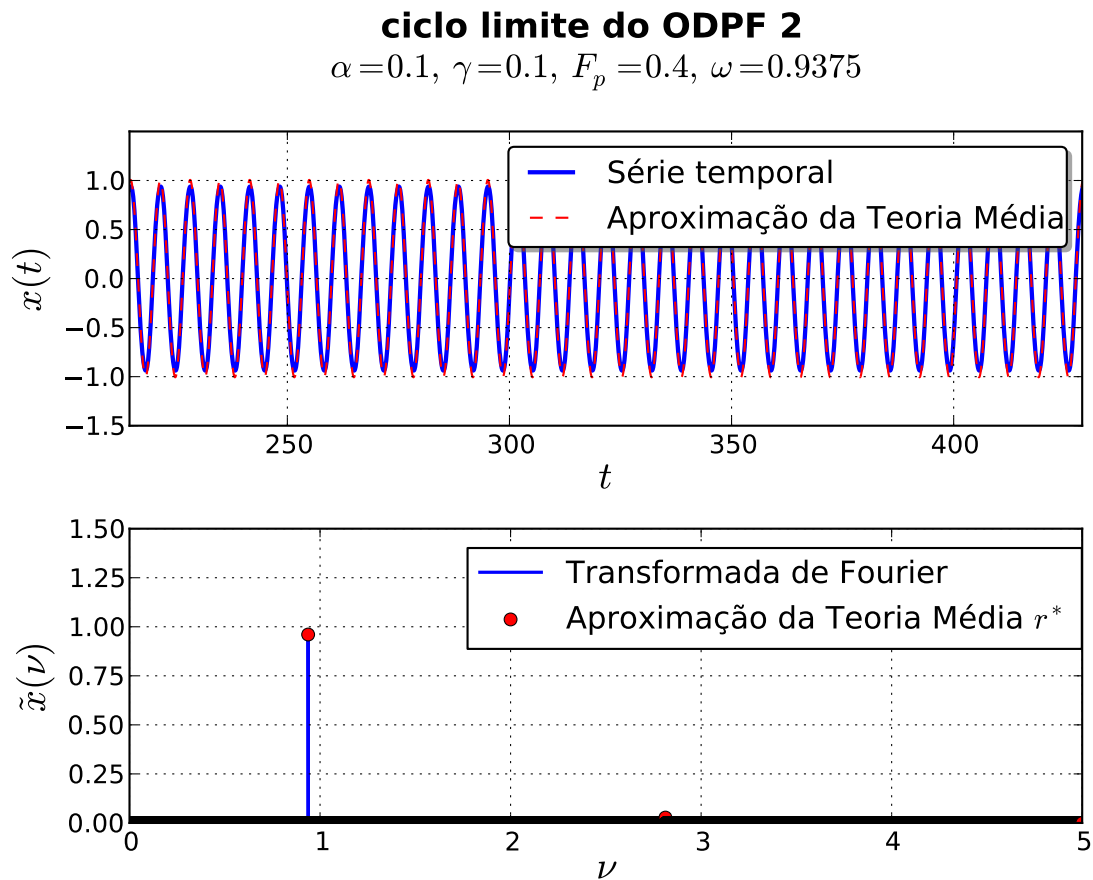


Figura 4.7: Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 2 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 0.9375$ . Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.

**ciclo limite do ODPF 2**

$$\alpha=0.1, \gamma=0.1, F_p=0.4, \omega=1$$

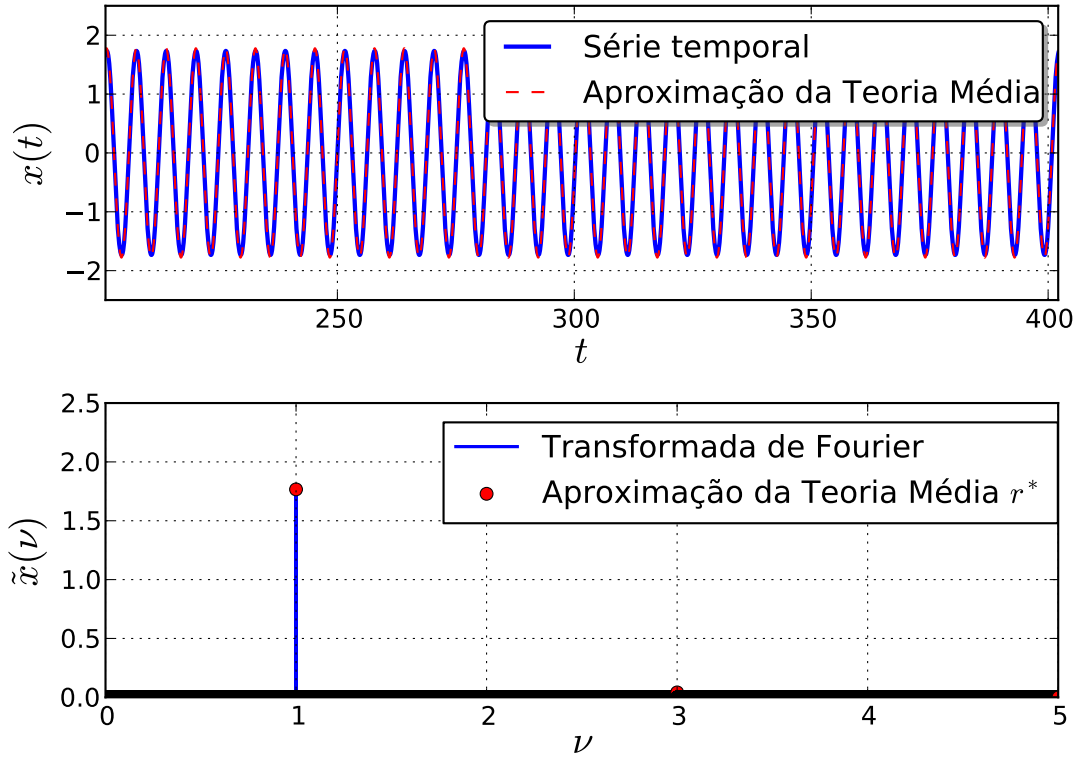


Figura 4.8: Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 2 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 1.0$ . Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.

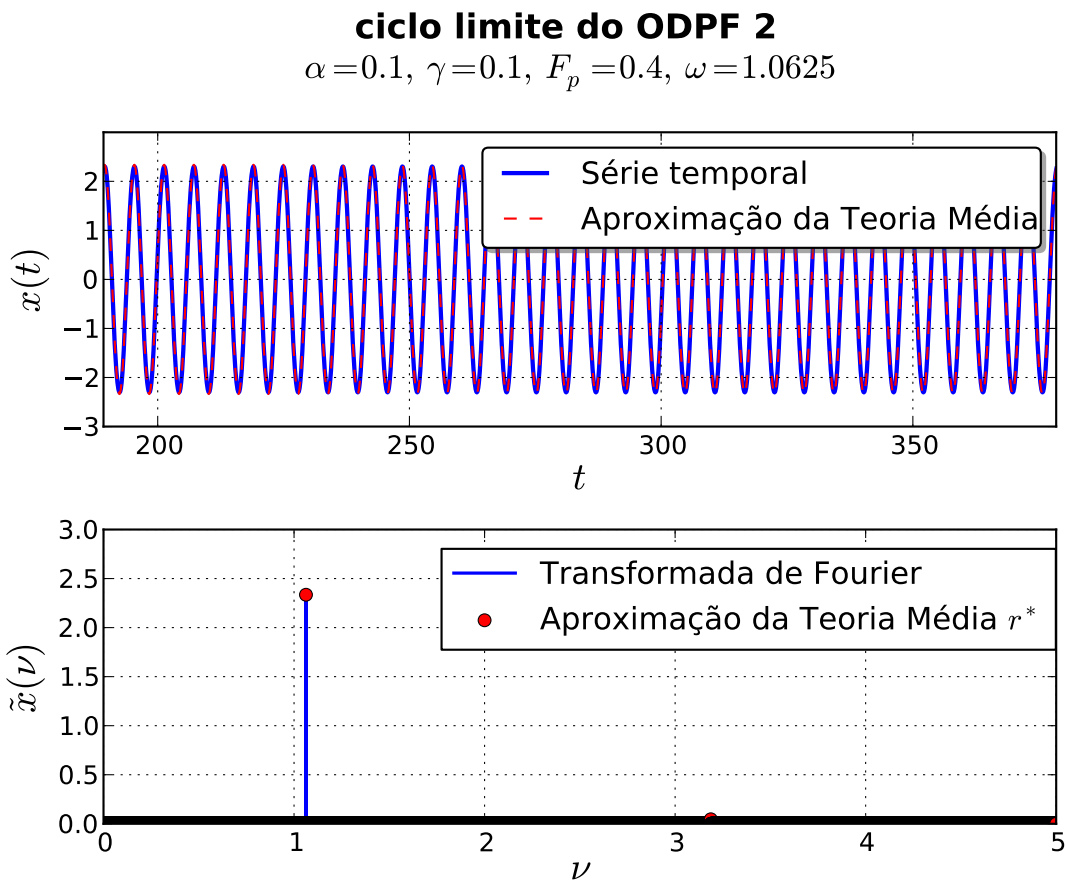


Figura 4.9: Comparação entre a resposta numérica e a analítica (aproximação da teoria da média) da evolução temporal de  $x(t)$  do ODPF 2 com a transformada de Fourier correspondente, que é dada pelo valor de pico na frequência  $\omega = 1.0625$ . Observa-se uma equivalência entre o valor obtido no pico e o da amplitude.



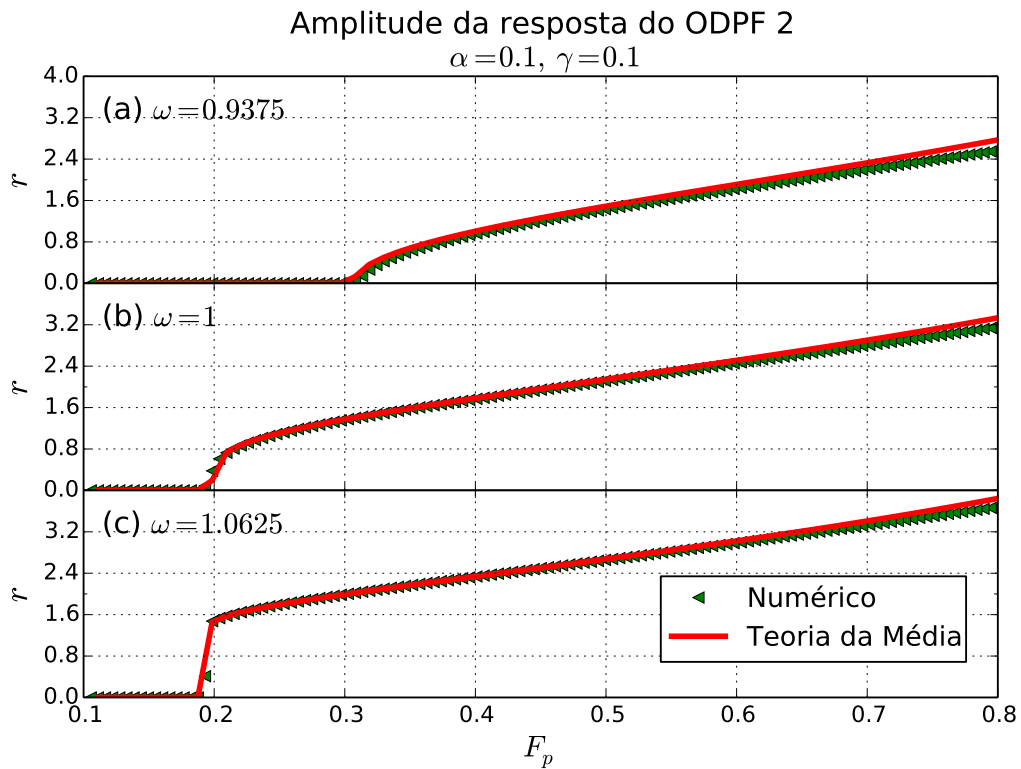


Figura 4.10: No quadro (a) ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica em  $F_p = 0.32$  no sistema não-autônomo original da Eq. (4.10), enquanto no sistema aproximado autônomo dado pela Eq. (4.11) ocorre uma bifurcação forquilha supercrítica, em  $F_p = 0.31$ . No quadro (b) também ocorre uma bifurcação de Hopf supercrítica (sistema não-autônomo) e uma bifurcação forquilha em  $F_p = 0.2$  (sistema aproximado). No quadro (c) ocorre em  $F_p = 0.2$  uma bifurcação Hopf subcrítica no sistema não-autônomo e uma bifurcação sela-nó, aproximadamente em  $F_p = 0.18$ , gerando um par de pontos fixos estável no sistema aproximado e um par de ciclos limites no sistema não-autônomo.

### 4.3 Conclusão

Estudamos nesse capítulo os efeitos da presença de termos não-lineares sobre o fenômeno da ressonância paramétrica no OPF. As principais modificações observadas ocorrem na região de instabilidade, onde as soluções divergentes foram eliminadas e no seu lugar surgem soluções periódicas (ciclos limites). Além disso, a natureza da bifurcação para instabilidade também foi qualitativamente modificada.

No caso do ODPF 1 surgem também novas bifurcações quando se transita da região estável (quiescente) para instável (oscilatória). Além da bifurcação de Hopf supercrítica (quando  $\omega < 1$ ) também observamos uma bifurcação de Hopf subcrítica (quando  $\omega > 1$ ), o que dá origem a uma região biestável.

No caso do ODPF 2 encontramos numericamente apenas bifurcações supercríticas na transição para instabilidade. Nesse oscilador não pudemos concluir a análise detalhada dessas bifurcações pela teoria da média de primeira ordem, embora isso seja possível de ser feito a partir do estudo das soluções da Eq. (4.16). Também lembramos que fizemos apenas um estudo introdutório sobre as bifurcações que podem existir em tais sistemas. Limitamo-nos a encontrar as bifurcações na transição para a primeira ressonância paramétrica. Muitos outros tipos de bifurcações podem ocorrer na região de instabilidade, inclusive rotas de bifurcações para o caos. No entanto, tal investigação pode ser bastante complexa de ser realizada analiticamente. A opção numérica também demanda bastante expertise e está além do escopo da presente dissertação.

Observamos, é importante mencionar, que os pontos de bifurcação dos ODPF podem ser bem importantes em aplicações na física experimental ou engenharia. Quando esses osciladores são excitados parametricamente nas vizinhanças desses pontos de bifurcação, tais osciladores podem se tornar excelentes amplificadores, fenômeno primeiramente previsto e observado em outros sistemas dinâmicos não-lineares por Wiesenfeld [28]. Essa possibilidade para os osciladores aqui estudados será investigada no próximo capítulo.

# Amplificação Paramétrica em Osciladores Não-Lineares

Neste capítulo estudamos a AP de pequenos sinais harmônicos externos aplicados aditivamente aos ODPF1 e ODPF2 descritos no capítulo 4. Investigamos o efeito da AP de pequenos sinais harmônicos em sintonia e em dessintonia com o bombeamento paramétrico para os osciladores não-lineares descritos no capítulo 4 pelo método da média e via integração numérica.

Na seção 5.1 investigamos o efeito da amplificação para o ODPF1 descrito na seção 4.2. Na seção 5.2 investigamos o efeito da amplificação de pequenos sinais periódicos para o oscilador descrito na seção 4.2. Em ambos os casos obtemos séries temporais, envelopes e correspondentes transformadas de Fourier para diversas frequências do sinal externo. Em cada caso também obtemos diversas curvas de ganho para a AP em função da frequência do sinal externo.

## 5.1 Amplificação Paramétrica do Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 1

A AP no ODPF 1 é descrita pela seguinte equação de movimento

$$\ddot{x}(t) + x(t) = -\gamma\dot{x}(t) - \alpha x^3(t) + F_p \cos(2\omega t)x(t) + F_s \cos(\omega t + \varphi(t)), \quad (5.1)$$

onde  $\varphi(t) = \delta t + \varphi_0$  é a fase do sinal externo,  $\delta = \omega_s - \omega$  é a dessintonia e  $\omega_s$  é a frequência do sinal externo. Um modelo semelhante ao esse de oscilador não linear com bombeamento paramétrico e estímulo externo foi utilizado na Ref. [29], no entanto a análise deles foi restrita a AP degenerada e os ganhos obtidos foram bem inferiores aos alcançados nesta dissertação.

Basearemos-nos na técnica do método da média e no método do balanço harmônico para obtermos as soluções, de modo que reescrevemos a Eq. (5.1) de maneira equivalente ao que fizemos na seção 3.2 para o OPF. Após a aplicação o método da média, obtemos o sistema de EDO

$$\begin{aligned}\dot{u} &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma\omega u + \left[ \Omega + \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) + \frac{F_p}{2} \right] v \right\} + \frac{F_s}{2\omega} \sin\varphi(t), \\ \dot{v} &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \left[ -\Omega - \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) + \frac{F_p}{2} \right] u + \gamma\omega v \right\} - \frac{F_s}{2\omega} \cos\varphi(t).\end{aligned}\quad (5.2)$$

Estamos interessados em analisar a resposta linear do sistema de Eqs. (5.2) para  $F_s \neq 0$ . Com esse objetivo tomamos  $u(t) = \bar{u} + u_1(t)$  e  $v(t) = \bar{v} + v_1(t)$ , sendo  $(\bar{u}, \bar{v})$  um ponto fixo do sistema de Eqs. (5.2) quando  $F_s = 0$ , o que nos fornece

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \left[ \gamma\omega + \frac{3\alpha\bar{u}\bar{v}}{2} \right] u_1 + \left[ \frac{F_p}{2} + \Omega + \frac{3\alpha}{4}(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2) \right] v_1 - F_s \sin\varphi(t) \right\}, \\ \dot{v}_1 &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \left[ \frac{F_p}{2} - \Omega - \frac{3\alpha}{4}(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2) \right] u_1 + \left[ \gamma\omega - \frac{3\alpha\bar{u}\bar{v}}{2} \right] v_1 + F_s \cos\varphi(t) \right\}.\end{aligned}\quad (5.3)$$

No caso em que  $\delta = 0$ , obtemos a seguinte resposta estacionária

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{F_s}{\chi} \begin{pmatrix} \gamma\omega - \frac{3\alpha\bar{u}\bar{v}}{2} & -\frac{F_p}{2} - \Omega - \frac{3\alpha}{4}(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2) \\ -\frac{F_p}{2} + \Omega + \frac{3\alpha}{4}(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2) & \gamma\omega + \frac{3\alpha\bar{u}\bar{v}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0 \end{pmatrix},\quad (5.4)$$

sendo  $\chi = (\gamma\omega)^2 - (3\alpha\bar{u}\bar{v}/2)^2 + [(\Omega + 3\alpha(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)/4 - F_p/2)(\Omega + 3\alpha(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)/4 - F_p/2)]$ .

No caso em que há dessintonia,  $\delta \neq 0$ , utilizamos o método do balanço harmônico, assumindo que  $u_1(t) = (\tilde{u}_1 e^{i\delta t} + \tilde{u}_1^* e^{-i\delta t})/2$  e  $v_1(t) = (\tilde{v}_1 e^{i\delta t} + \tilde{v}_1^* e^{-i\delta t})/2$  no sistema de Eqs.(5.3). Assim obtemos

$$\begin{aligned}2i\delta\omega\tilde{u}_1 &= -\left\{ \gamma\omega\tilde{u}_1 + \Omega\tilde{v}_1 + 3\alpha [2\bar{u}\bar{v}\tilde{u}_1 + (\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)\tilde{v}_1] /4 + \frac{F_p}{2}\tilde{v}_1 + iF_s e^{i\varphi_0} \right\}, \\ 2i\delta\omega\tilde{v}_1 &= -\left\{ -\Omega\tilde{u}_1 + \gamma\omega\tilde{v}_1 - 3\alpha [(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)\tilde{u}_1 + 2\bar{u}\bar{v}\tilde{v}_1] /4 + \frac{F_p}{2}\tilde{u}_1 + F_s e^{i\varphi_0} \right\}.\end{aligned}\quad (5.5)$$

Podemos reescrever o sistema algébrico acima na seguinte forma matricial

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix} = -F_s e^{i\varphi_0} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix},\quad (5.6)$$

em que os coeficientes são dados por

$$\begin{aligned} A &= \gamma\omega + 2i\delta\omega + 3\alpha\bar{u}\bar{v}/2, \\ B &= [\Omega + 3\alpha(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)/4 + F_p/2], \\ C &= -[\Omega + 3\alpha(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)/4 - F_p/2], \\ D &= \gamma\omega + 2i\delta\omega - 3\alpha\bar{u}\bar{v}/2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

e

$$\begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{v}_1 \end{pmatrix} = -\frac{F_s e^{i\varphi_0}}{(AD - BC)} \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Assim, na aproximação da teoria da média e do balanço harmônico de primeira ordem, podemos escrever a resposta do ODPF1 à excitação externa, de forma aproximada, como sendo

$$x(t) = \bar{u} \cos(\omega t) - \bar{v} \sin \omega t + u_s \cos[(\omega + \delta)t] - v_s \sin[(\omega + \delta)t] + u_i \cos[(\omega - \delta)t] - v_i \sin[(\omega - \delta)t], \quad (5.9)$$

onde  $u_s = \text{Re}[\tilde{u}_1] - \text{Im}[\tilde{v}_1]$ ,  $v_s = \text{Im}[\tilde{u}_1] + \text{Re}[\tilde{v}_1]$ ,  $u_i = \text{Re}[\tilde{u}_1] + \text{Im}[\tilde{v}_1]$  e  $v_i = -\text{Im}[\tilde{u}_1] + \text{Re}[\tilde{v}_1]$ . Os termos de frequência  $\omega$  correspondem à resposta do bombeamento, que ocorre somente na região de instabilidade do ODPF 1, os termos em  $\omega + \delta$  são conhecidos como a resposta do sinal e os termos em  $\omega - \delta$  são conhecidos como a resposta do *idler*. Assim, podemos conceber três funções de ganho correspondentes.

O ganho da AP da resposta do bombeamento em relação à amplitude do sinal externo em decibéis é dado por

$$G_p = 20 \log \frac{X_p}{F_s}, \quad (5.10)$$

onde  $X_p = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$  é a amplitude da resposta do bombeamento para o  $F_s \neq 0$ .

O ganho da AP da resposta do sinal externo em relação à amplitude do sinal externo em decibéis é dado por

$$G_s = 20 \log \frac{X_s}{F_s}, \quad (5.11)$$

onde  $X_s = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  é a amplitude da resposta do sinal para o  $F_s \neq 0$ .

O ganho em decibéis do *idler* é definida como

$$G_i = 20 \log \frac{X_i}{F_s}, \quad (5.12)$$

onde  $X_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$ .

Muitos sistemas dinâmicos não-lineares, quando próximos a um ponto de bifurcação, podem ser utilizados como amplificadores [28]. Quanto mais próximos estiverem, no

espaço de parâmetros, desse ponto de bifurcação maior será o ganho do amplificador. Almog et al. [25] estudaram experimentalmente a amplificação de um pequeno sinal ac no oscilador de Duffing próximo ao ponto de início da região de biestabilidade, realizando comparações com as previsões teóricas, percebendo assim um alto ganho.

Apresentamos na Fig. 5.1, o ganho da AP degenerada, quando  $\omega = \omega_s$ , no ODPF 1 em função da fase entre o sinal e o bombeamento paramétrico. Novamente, observamos que o ganho apresenta grande sensibilidade na fase quando  $\omega = \omega_0$ , chegando a ter uma variação de uns 20dB entre os valores máximo e mínimo. Quando há dessintonia entre  $\omega$  e  $\omega_0 = 1$ , a variação no ganho se torna muito menor.

De modo semelhante ao que ocorre no OPF, verificamos que o ganho do ODPF 1 depende da fase entre o sinal externo e o bombeamento paramétrico. Observamos também que não só o ganho aumenta com o aumento da amplitude de bombeamento, mas também a variação do ganho com a fase aumenta quando se aumenta  $F_p$ , sendo máxima no limiar da instabilidade paramétrica. Devido a isso, o ODPF pode também ser utilizado na detecção de sinais ac com modulação de fase como podemos ver na Fig. 5.2. Podendo até ser usado em telecomunicações para a transmissão de dados. Nessa figura verificamos que o método da média pode ser utilizado para capturar o efeito de modulação de fase do sinal externo. Praticamente, a mesma análise e os mesmos resultados obtidos no capítulo 3, na Fig. 3.3, são obtidos aqui.

Na Fig. 5.3, mostramos séries temporais da AP para o ODPF 1 obtidas numericamente a partir da Eq. (5.1), enquanto as envelopes foram obtidas a partir do sistema autônomo aproximado dado pela Eq. (5.2). Observamos a existência das simetrias de translação e de inversão temporal nas envelopes. Na Fig. 5.4, plotamos as transformadas de Fourier correspondentes às séries temporais mostradas na Fig. 5.3. Podemos ver claramente os picos do sinal, em  $\nu = \omega_s$ , e do idler, em  $\nu = 2\omega - \omega_s$ . O espectro numérico foi obtido diretamente das transformadas de Fourier das séries temporais de soluções da Eq. (5.1), enquanto as aproximações analíticas das transformadas de Fourier foram obtidas das correspondentes séries temporais da Eq. (5.18).

Na Fig. 5.5, apresentamos algumas transformadas de Fourier para a AP do ODPF 1 na região de instabilidade. Os resultados numéricos foram obtidos de séries temporais estacionárias que obedecem a Eq. (5.1) e comparadas com os valores de pico das respectivas aproximações analíticas obtidas da Eq. (5.18). Na região de instabilidade os termos  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  não são mais nulos. Nesses exemplos, esses termos passam a ter amplitudes bem maiores que as respostas do sinal e do idler. Podemos observar também que existe excelente concordância entre os resultados numéricos e analíticos.

Nas figuras a seguir apresentamos os resultados dos ganhos do sinal e do idler do ODPF 1 obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) comparados com os resultados analíticos dados pelas Eqs. (5.11) e (5.12) para os diferentes parâmetros de  $\omega$  e  $F_p$ .

Na Fig. 5.6, plotamos os ganhos do sinal e do idler em termos da frequência do sinal

$\omega_s$ , com a amplitude de bombeamento  $F_p = 0.025$  e  $\omega = 0.96875$ . Obtivemos que a curva de ganho do sinal é praticamente igual à curva do ganho do [OHF](#).

Na Fig. [5.7](#), plotamos os ganhos do sinal e do idler em termos da frequência do sinal  $\omega_s$ , com a amplitude de bombeamento  $F_p = 0.025$  e  $\omega = 0.96875$ . Obtivemos que a curva de ganho do sinal apresenta um pico próximo a 45dB, enquanto a curva de ganho do OHF apresenta um pico de 36dB. A largura da curva de ganho do sinal é mais delgada que a do OHF. Quanto maior for  $F_p$  maior é o ganho máximo e mais delgada a curva de ganho até o limiar da região de instabilidade. Por exemplo, na Fig. [5.8](#) estamos perto do limiar de instabilidade e podemos conseguir ganhos de até aproximadamente 62dB. Na região de instabilidade, o valor máximo do ganho satura e até diminui, como podemos ver na Fig. [5.9](#).

Na Fig. [5.10](#), plotamos os ganhos do sinal e do idler em termos da frequência do sinal  $\omega_s$ , com a amplitude de bombeamento  $F_p = 0.025$  e  $\omega = 1.03125$ . Obtivemos novamente que a curva de ganho do sinal é praticamente igual à curva do ganho do [OHF](#).

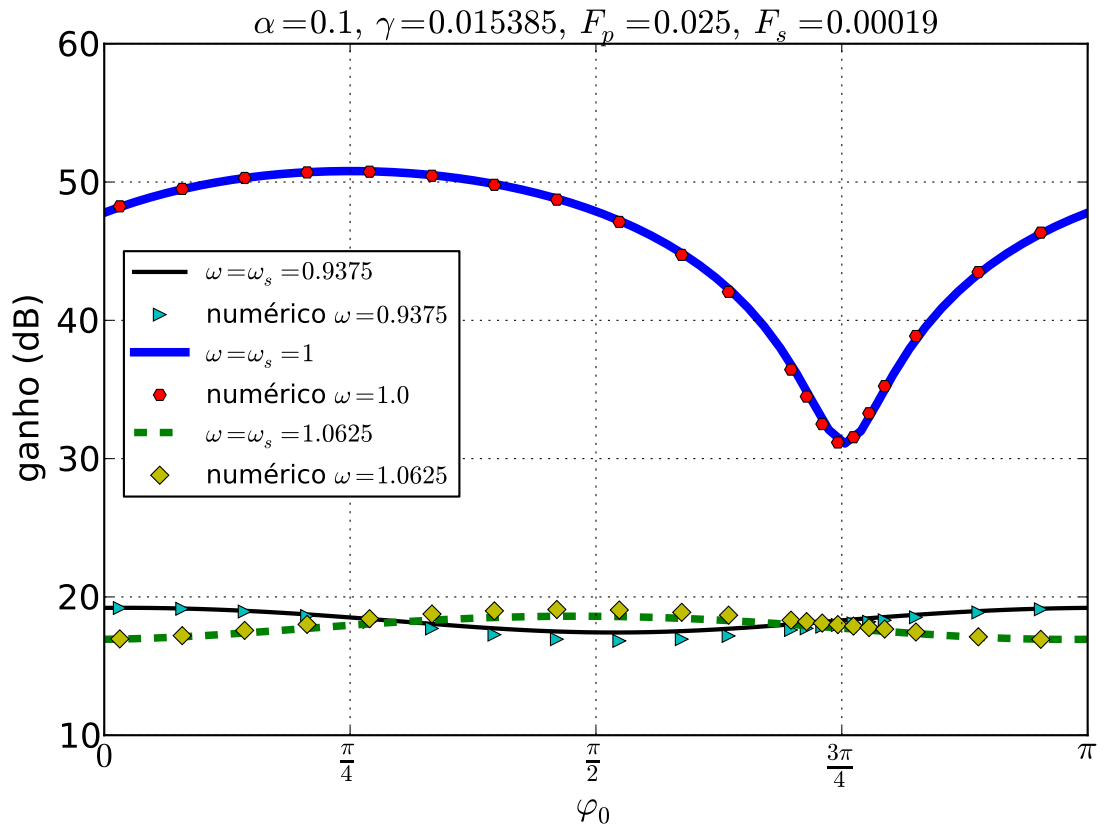


Figura 5.1: Estimativas analíticas e numéricas do ganho do amplificador paramétrico em relação à resposta do oscilador harmônico em função da fase. O ganho analítico foi obtido a partir da Eq. (5.4), enquanto o ganho numérico foi obtido via integração numérica da Eq. (5.1), utilizando os valores estacionários de  $U(t)$  e  $V(t)$  quando  $t = 2n\pi/\omega$  na transformação definida na Eq. (2.15). Em seguida, tais valores foram substituídos na expressão  $20 \log_{10} \frac{\sqrt{U^2+V^2}}{F_s}$ .



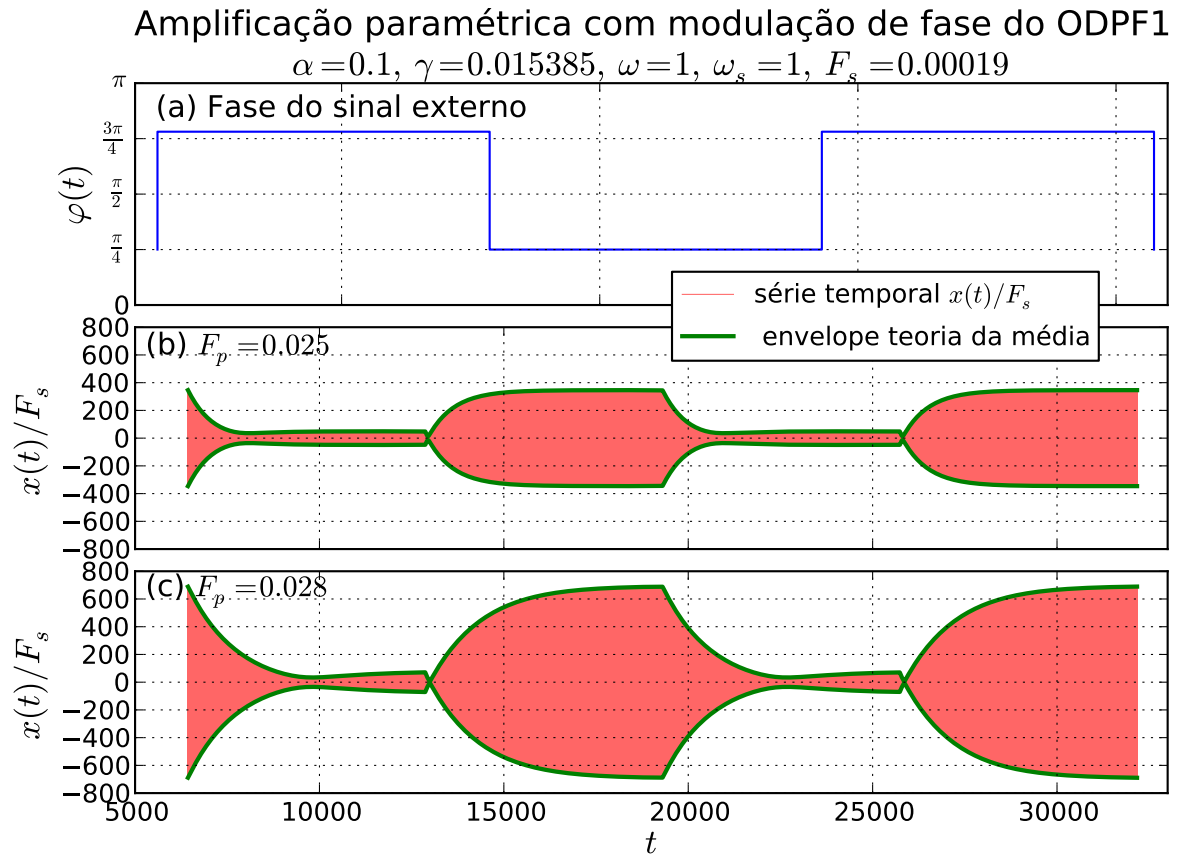


Figura 5.2: Modulação de fase da AP do ODPF 1 correspondente à integração numérica do sistema descrito pela Eq. (5.1), mostrando que mesmo com a não-linearidade pode ocorrer a transmissão de informação. No quadro (a) mostramos a fase do sinal externo em função do tempo, ocorrendo alternância entre as fases  $\pi/4$  e  $3\pi/4$ , cujos ganhos estão de acordo com os resultados da Fig. 5.1. Nos quadros (b) e (c) mostramos o ganho em função do tempo da resposta do AP em relação ao sinal  $F_s$  para diferentes valores de  $F_p$ . A modulação de fase da AP do ODPF 1 em é a mesma em ambos os quadros. As séries temporais foram obtidas da integração numérica da Eq.(5.1) e as envelopes via teoria da média, mediante integração numérica do sistema EDO dado pelas Eqs. (5.2).

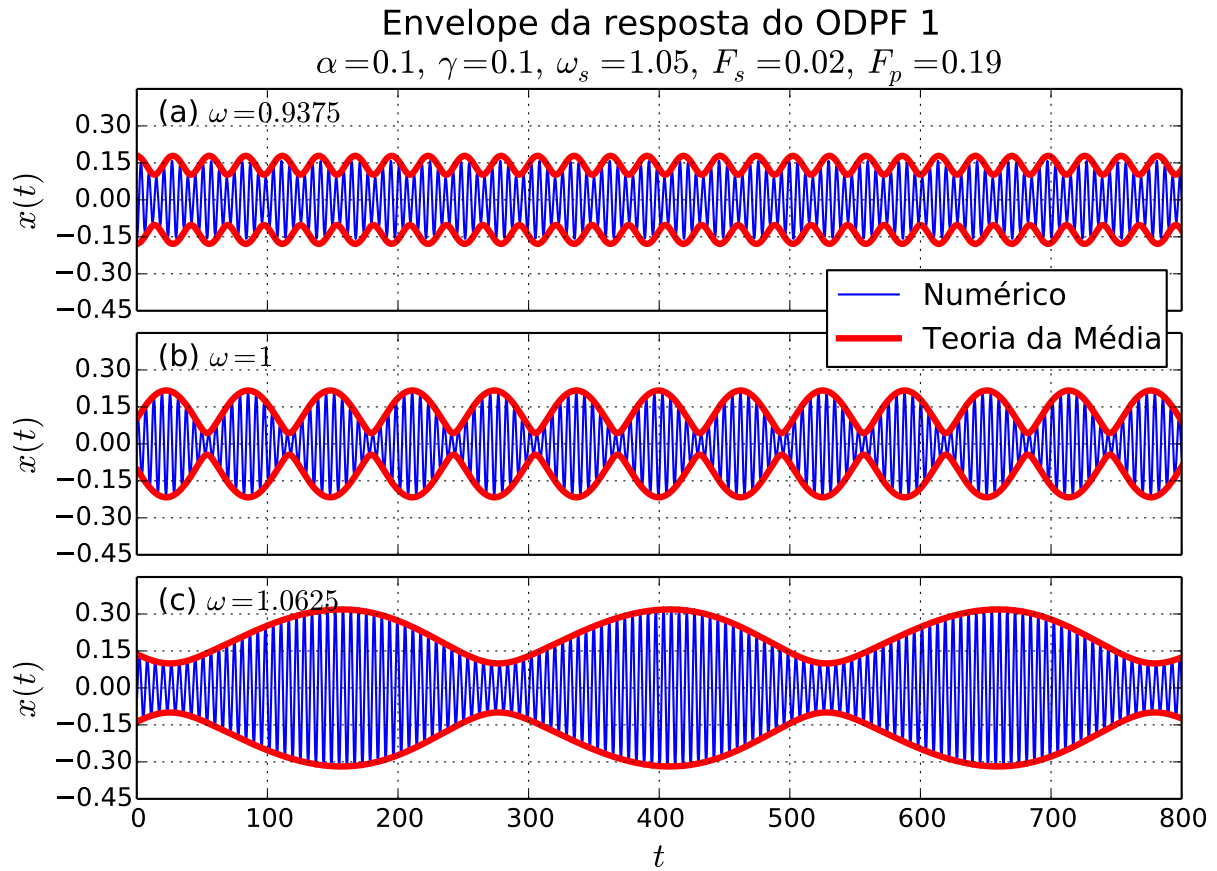


Figura 5.3: Séries temporais para AP do ODPF 1 obtidas da integração numérica da Eq. (5.1). As envelopes são dadas por  $\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$  e são soluções estacionárias do sistema aproximado autônomo da Eq. (5.2) nas frequências  $\omega = 0.9375$ ,  $\omega = 1.0$  e  $\omega = 1.0625$ , respectivamente.

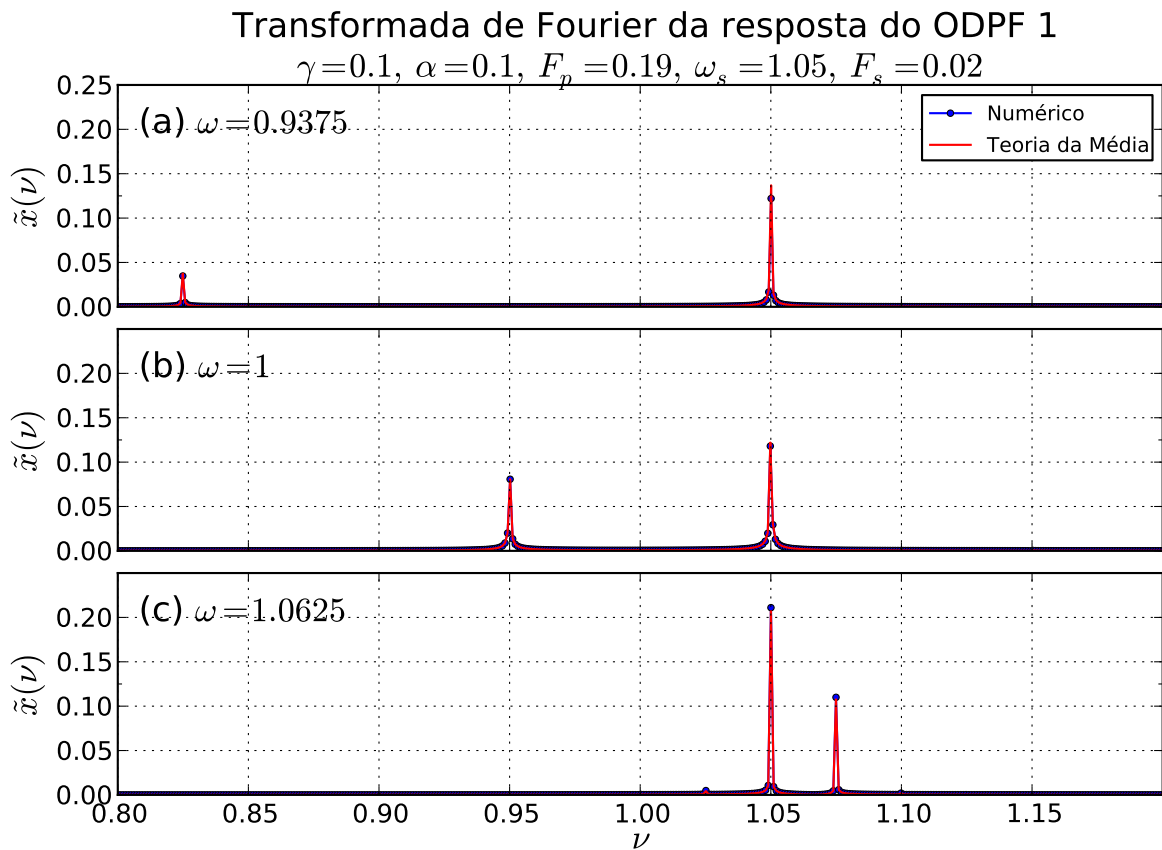


Figura 5.4: Amplificação paramétrica no ODPF 1. Transformadas de Fourier das séries temporais da Fig. 5.3. Os resultados numéricos foram obtidos a partir da Eq.(5.1), enquanto os resultados analíticos foram obtidos da Eq. (5.18). Nos três quadros vemos, proeminentemente, os picos correspondentes ao sinal e ao idler. Note que os picos de sinal e idler estão dispostos simetricamente em relação à metade da frequência de bombeamento  $\omega$ .

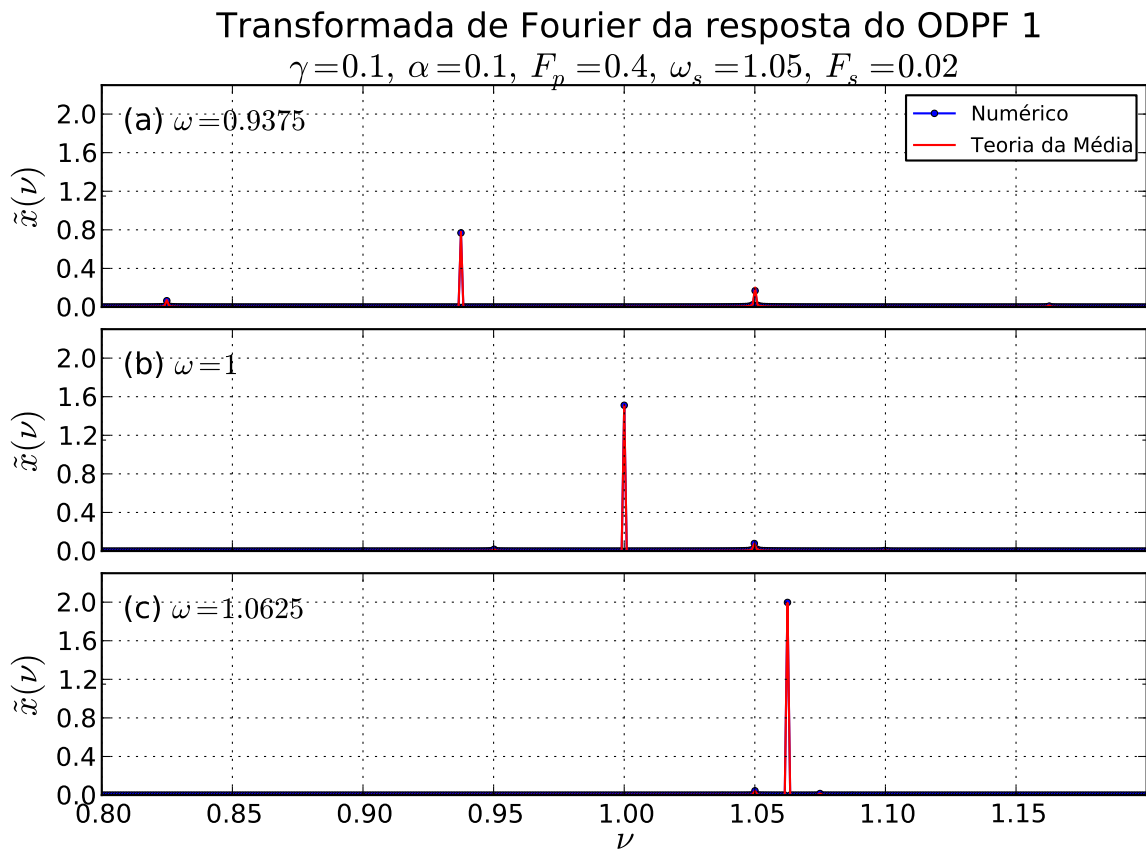


Figura 5.5: Transformadas de Fourier para a AP do ODPF 1 na região de instabilidade paramétrica. Os resultados numéricos foram obtidos a partir de séries temporais estacionárias que obedecem a Eq.(5.1), enquanto os resultados analíticos foram obtidos a partir de séries temporais aproximadas a partir da Eq. (5.18). O grande valor do pico em  $\nu = \omega$  indica que estamos na região de instabilidade paramétrica.

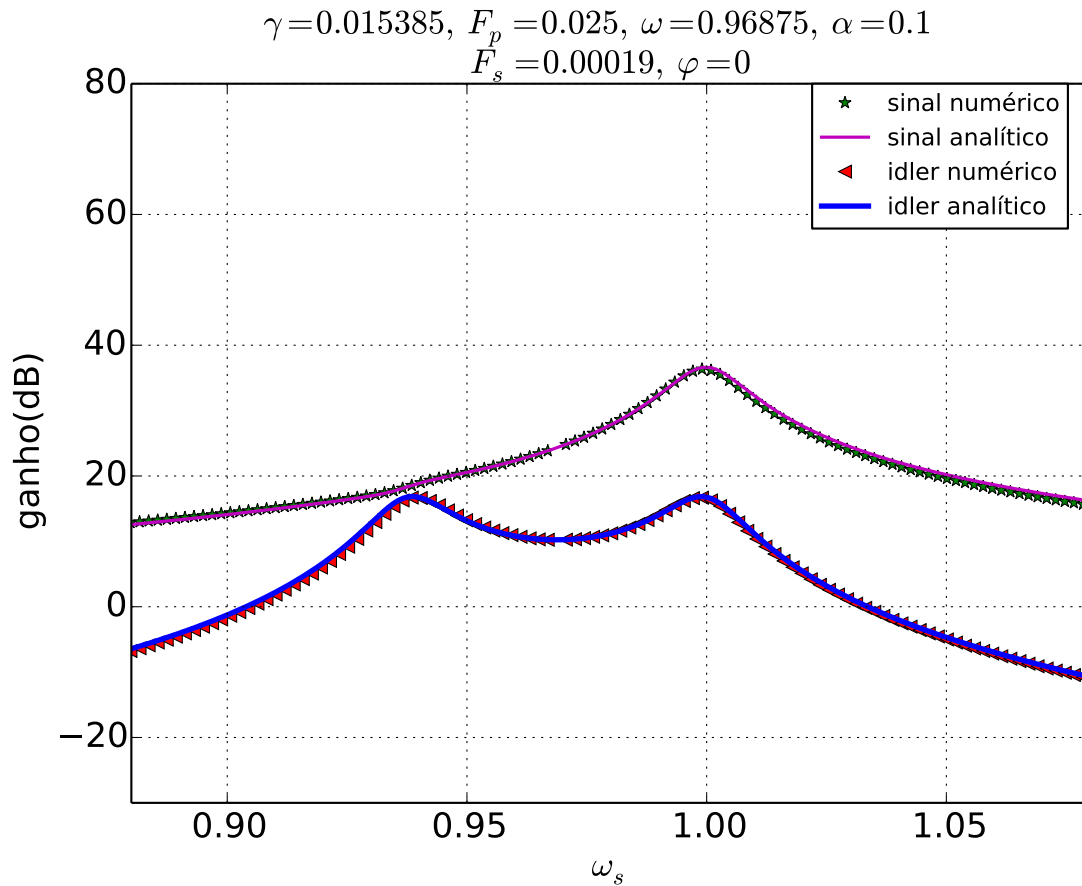


Figura 5.6: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.11) e do idler dado pela Eq. (5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e dos resultados analíticos das Eqs. (5.8) e (5.18). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 36(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 65$ .

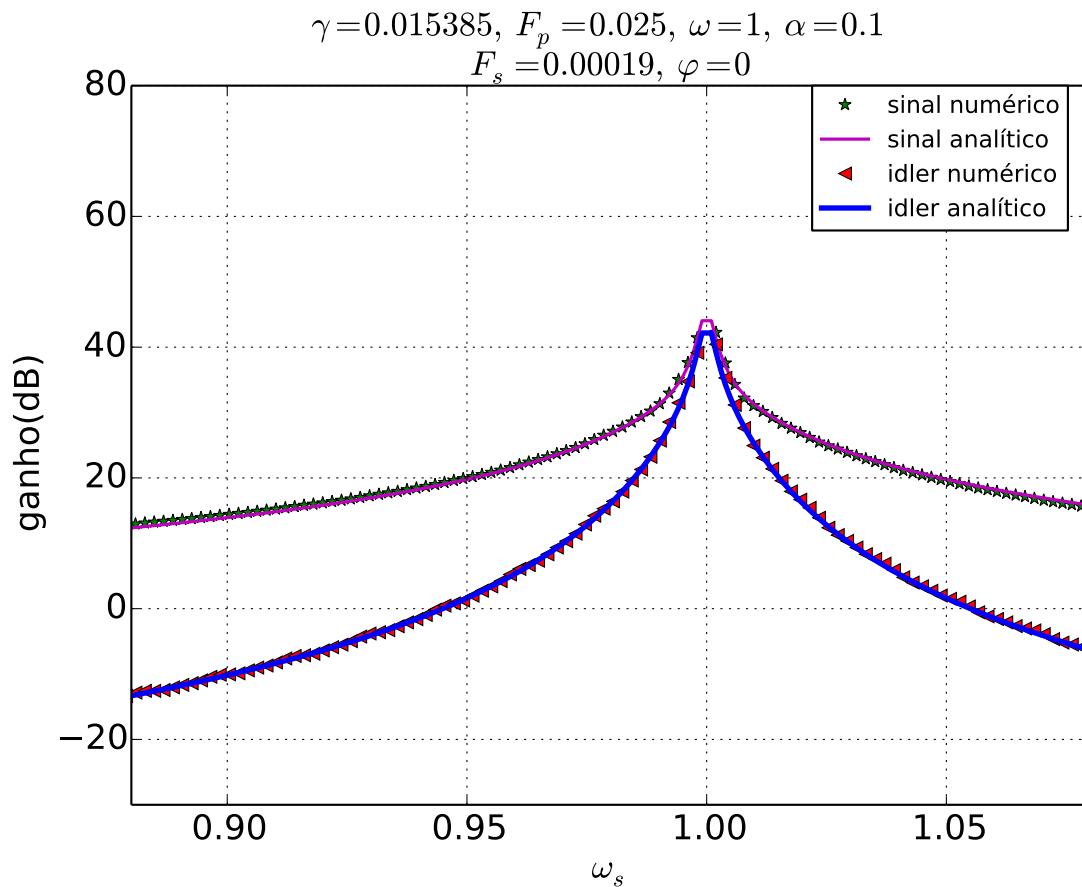


Figura 5.7: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq.(5.11) e do idler dado pela Eq.(5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e os resultados analíticos e dos resultados analíticos das Eqs. (5.8) e (5.18).. Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 45(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , em torno de 9dB acima do ganho máximo do oscilador harmônico linear com  $Q = 65$ .

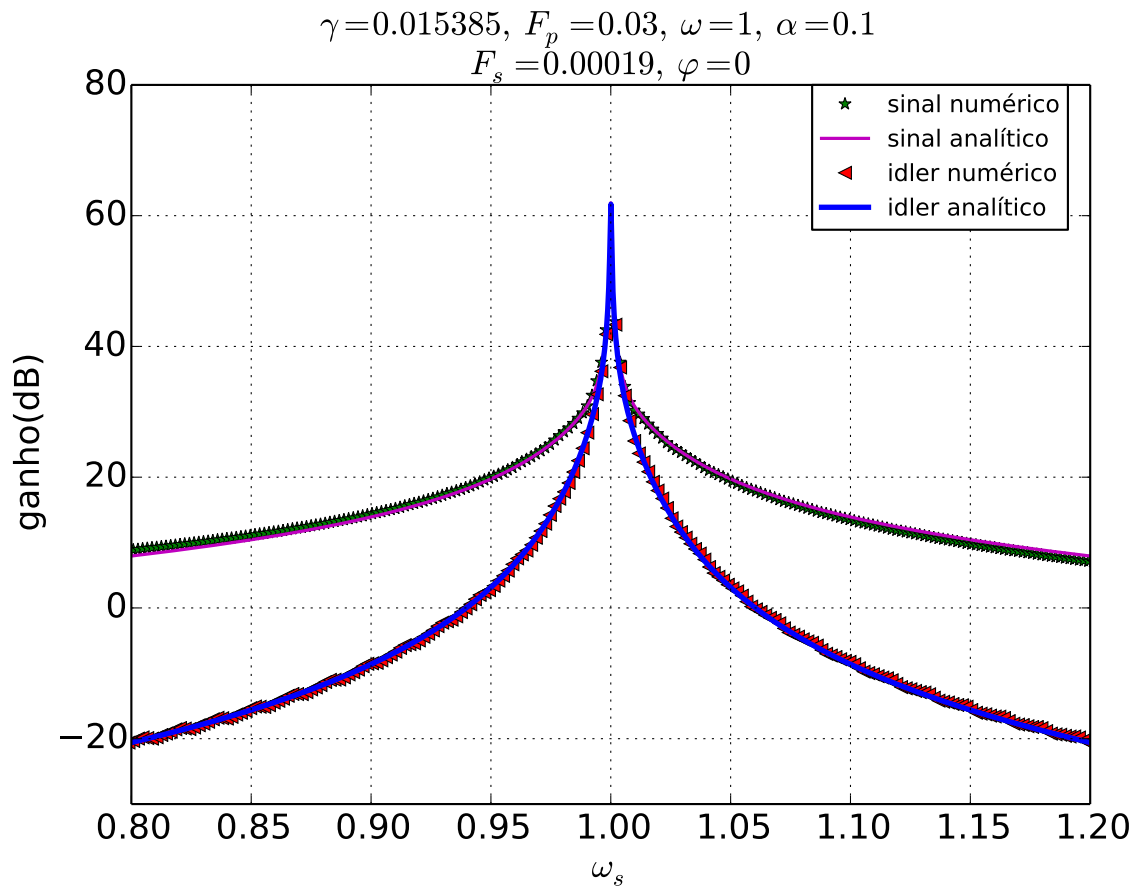


Figura 5.8: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq.(5.11) e do idler dado pela Eq.(5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e os resultados analíticos. Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 62(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , em torno de 26dB acima do ganho máximo do oscilador harmônico linear com  $Q = 65$ .

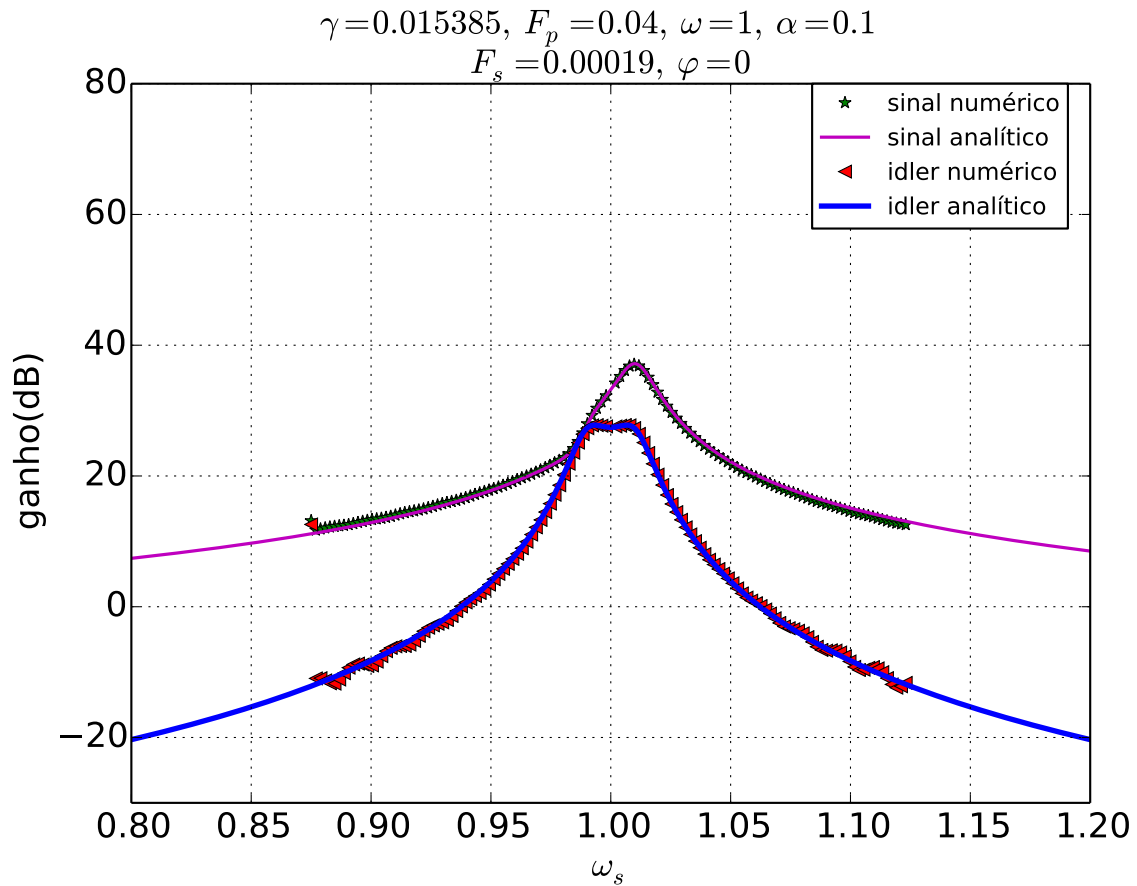


Figura 5.9: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq.(5.11) e do idler dado pela Eq.(5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos um pico de ganho para o sinal caiu drasticamente em relação ao ganho no limiar de instabilidade, de um valor acima de 60dB para  $\approx 37(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , que é um pouco acima do ganho máximo do oscilador harmônico linear com  $Q = 65$ . Aqui o oscilador de Duffing foi bombeado na região de instabilidade.



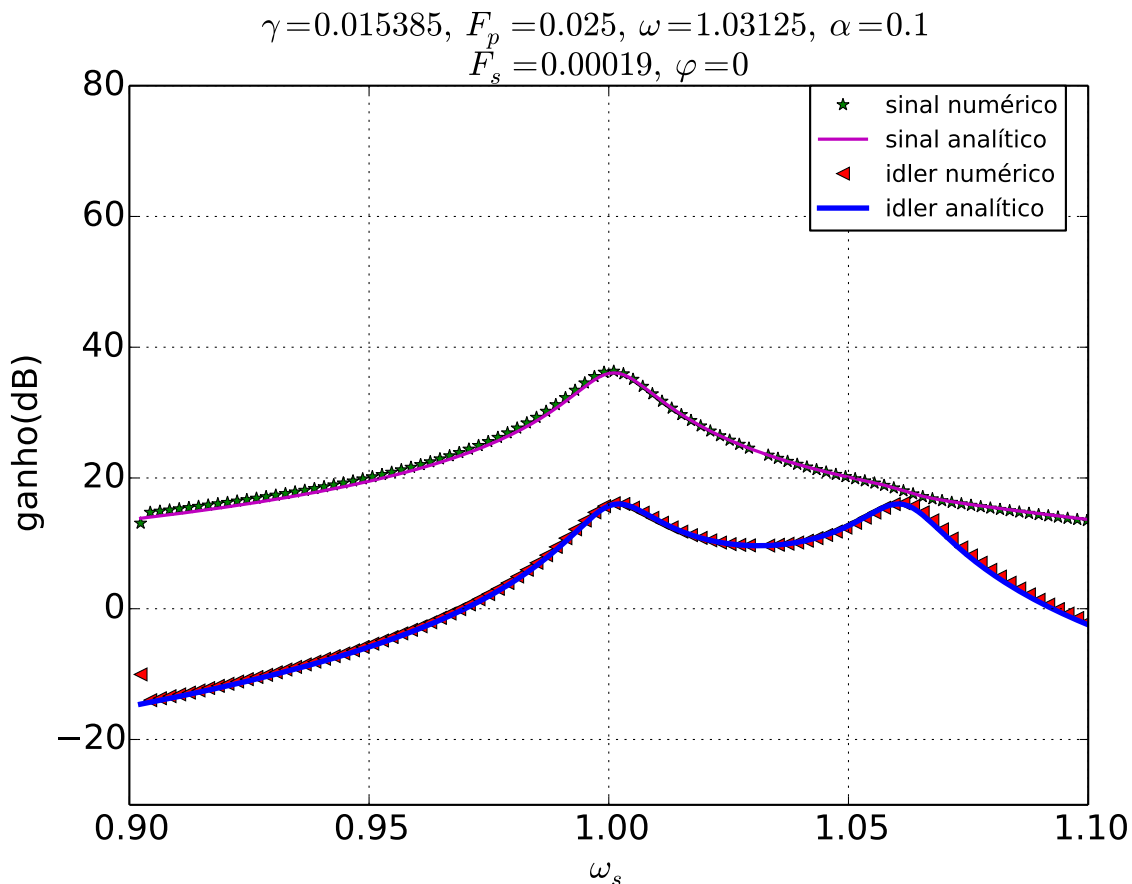


Figura 5.10: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.11) e do idler dado pela Eq. (5.12) do ODPF 1 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.1) e dos resultados analíticos das Eqs. (5.8) e (5.18). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 36(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 65$ .

## 5.2 Amplificação Paramétrica do Oscilador de Duffing Parametricamente Forçado 2

Adicionamos à Eq. (4.10) uma excitação externa ac, transformando assim o oscilador parametricamente bombeado em um amplificador paramétrico, que descrito pela seguinte equação de movimento.

$$\ddot{x}(t) = -\gamma\dot{x}(t) + (F_p \cos(2\omega t) - 1) [x(t) + \alpha x^3(t)] + F_s \cos(\omega_s t + \varphi_0). \quad (5.13)$$

Quando a amplitude de bombeamento, o coeficiente de dissipação, o coeficiente não-linear e a amplitude do sinal externo forem pequenos ( $\ll 1$ ) podemos aplicar o método da média para obtermos um sistema de EDO mais simples (autônomo) que descreva

aproximadamente a dinâmica do amplificador paramétrico. Fazendo isso obtemos

$$\dot{u} = -\frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma\omega u + \left[ \Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha v^2 + \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) \right] v \right\} + \frac{F_s}{2\omega} \sin\varphi(t), \quad (5.14a)$$

$$\dot{v} = -\frac{1}{2\omega} \left\{ \left[ -\Omega + \frac{F_p}{2} + \frac{F_p}{2}\alpha u^2 - \frac{3\alpha}{4}(u^2 + v^2) \right] u + \gamma\omega v \right\} - \frac{F_s}{2\omega} \cos\varphi(t). \quad (5.14b)$$

Estamos interessados em analisar a resposta linear do sistema dado pela Eq. (5.14a-b) para  $F_s \neq 0$  com  $u(t) = \bar{u} + u_1(t)$  e  $v(t) = \bar{v} + v_1(t)$ , onde  $\bar{u}$  e  $\bar{v}$  são os pontos fixos da Eq. (5.14a-b) com  $F_s = 0$ , o que nos fornece

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ \gamma\omega u_1 + \Omega v_1 + \frac{F_p}{2} v_1 + \frac{F_p}{2} \alpha \bar{v} v_1 + \frac{3\alpha}{4} [2\bar{u}\bar{v}u_1 + (\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)v_1] - F_s \sin\varphi(t) \right\} \\ \dot{v}_1 &= -\frac{1}{2\omega} \left\{ -\Omega u_1 + \frac{F_p}{2} u_1 + \frac{F_p}{2} \alpha \bar{u} u_1 - \frac{3\alpha}{4} [(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)u_1 + 2\bar{u}\bar{v}v_1] + \gamma\omega v_1 + F_s \cos\varphi(t) \right\}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

No caso em que  $\delta = 0$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix} = \frac{F_s}{\chi} \begin{pmatrix} \gamma\omega - \frac{3\alpha\bar{u}\bar{v}}{2} & \Theta \\ \Upsilon & \gamma\omega + \frac{3\alpha\bar{u}\bar{v}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\varphi_0 \\ -\cos\varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

sendo  $\Theta = -\frac{F_p}{2} - \frac{F_p}{2}\alpha\bar{v} - \Omega - \frac{3\alpha}{4}(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)$ ,  $\Upsilon = -\frac{F_p}{2} - \frac{F_p}{2}\alpha\bar{u} + \Omega + \frac{3\alpha}{4}(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)$  e  $\chi = (\gamma\omega)^2 - (3\alpha\bar{u}\bar{v}/2)^2 + (\Omega + 3\alpha(\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)/4 - F_p/2 + F_p\alpha\bar{v}/2)(\Omega + 3\alpha(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)/4 - F_p/2 + F_p\alpha\bar{u}/2)$ .

No caso em que  $\delta \neq 0$ , utilizamos o método do balanço harmônico, assumimos  $u_1(t) = (\tilde{u}_1 e^{i\delta t} + \tilde{u}_1^* e^{-i\delta t})/2$  e  $v_1(t) = (\tilde{v}_1 e^{i\delta t} + \tilde{v}_1^* e^{-i\delta t})/2$ , no sistema de Eqs. (5.15), obtendo

$$\begin{aligned} 2i\delta\omega\tilde{u}_1 &= -\left\{ \gamma\omega\tilde{u}_1 + \Omega\tilde{v}_1 + \frac{F_p}{2}\tilde{v}_1 + \frac{F_p}{2}\alpha\bar{v}\tilde{v}_1 + \frac{3\alpha}{4} [2\bar{u}\bar{v}\tilde{u}_1 + (\bar{u}^2 + 3\bar{v}^2)\tilde{v}_1] + iF_s e^{i\varphi_0} \right\} \\ 2i\delta\omega\tilde{v}_1 &= -\left\{ -\Omega\tilde{u}_1 + \frac{F_p}{2}\tilde{u}_1 - \frac{F_p}{2}\alpha\bar{u}\tilde{u}_1 - \frac{3\alpha}{4} [(\bar{v}^2 + 3\bar{u}^2)\tilde{u}_1 + 2\bar{u}\bar{v}\tilde{v}_1] + \gamma\omega\tilde{v}_1 + F_s e^{i\varphi_0} \right\}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Assim, na aproximação da teoria da média e do balanço harmônico de primeira ordem, podemos escrever a resposta do ODPF2 à excitação externa, de forma aproximada, como sendo

$$x(t) = \bar{u} \cos(\omega t) - \bar{v} \sin\omega t + u_s \cos[(\omega + \delta)t] - v_s \sin[(\omega + \delta)t] + u_i \cos[(\omega - \delta)t] - v_i \sin[(\omega - \delta)t], \quad (5.18)$$

onde  $u_s = \text{Re}[\tilde{u}_1] - \text{Im}[\tilde{v}_1]$ ,  $v_s = \text{Im}[\tilde{u}_1] + \text{Re}[\tilde{v}_1]$ ,  $u_i = \text{Re}[\tilde{u}_1] + \text{Im}[\tilde{v}_1]$  e  $v_i = -\text{Im}[\tilde{u}_1] + \text{Re}[\tilde{v}_1]$ . Os termos de frequência  $\omega$  correspondem à resposta do bombeamento, que ocorre

somente na região de instabilidade do ODPF 2, os termos em  $\omega + \delta$  são conhecidos como a resposta do sinal e os termos em  $\omega - \delta$  são conhecidos como a resposta do *idler*. Assim, podemos conceber três funções de ganho correspondentes.

O ganho da AP da resposta não-linear do bombeamento em relação à amplitude do sinal externo em decibéis é dado por

$$G_p = 20 \log \frac{X_p}{F_s}, \quad (5.19)$$

onde  $X_p = \sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}$  é a amplitude da resposta do bombeamento para o  $F_s \neq 0$ . O termo  $X_p$  só é não nulo quando  $F_p$  estiver acima do limiar de instabilidade.

O ganho da AP da resposta do sinal externo em relação à amplitude do sinal externo em decibéis é dado por

$$G_s = 20 \log \frac{X_s}{F_s}, \quad (5.20)$$

onde  $X_s = \sqrt{u_s^2 + v_s^2}$  é a amplitude da resposta do sinal para o  $F_s \neq 0$ .

O ganho em decibéis do *idler* é definida como

$$G_i = 20 \log \frac{X_i}{F_s}, \quad (5.21)$$

onde  $X_i = \sqrt{u_i^2 + v_i^2}$ .

Na Fig. 5.11, mostramos ganho da AP degenerada, ou seja quando  $\omega = \omega_s$ , no ODPF 2 em função da fase entre o sinal externo e o bombeamento. Novamente, observamos que o ganho apresenta grande sensibilidade na fase quando  $\omega = \omega_0$ , chegando a ter uma variação de uns  $20dB$  entre os valores máximo e mínimo.

Na Fig. 5.12, mostramos que este AP não-linear pode ser utilizado para a recepção de sinais com modulação de fase, que são importantes em telecomunicações. Utilizando o sistema de EDO obtido através do método da teoria da média a partir das Eqs. (5.14a)-(5.14b) analisamos a modulação de fase, como mostrado para diferentes  $F_p$ .

Na Fig. 5.13, mostramos séries temporais da AP para o ODPF 2 obtidas numericamente a partir da Eq. (5.13), com as envelopes obtidas do sistema autônomo aproximado dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b).

Na Fig. 5.14, plotamos as transformadas de Fourier correspondentes às séries temporais mostradas na Fig. 5.13. Podemos ver claramente os picos do sinal, em  $\nu = \omega_s$ , e do idler, em  $\nu = 2\omega - \omega_s$ . O espectro numérico foi obtido diretamente das transformadas de Fourier das séries temporais de soluções da Eq. (5.13), enquanto as aproximações analíticas das transformadas de Fourier foram obtidas das correspondentes séries temporais da Eq. (5.14a-b) com a transformação definida na Eq. (2.15). No quadro (c), vemos que a aproximação do balanço harmônico deixa de valer. Nesse caso, temos a geração de harmônicos em relação ao sinal e ao idler com novos picos em  $\omega_0 \pm 3\delta$ ,  $\omega_0 \pm 5\delta$ , etc.

Nas Figs. 5.15-5.17, plotamos os ganhos do sinal e do idler em termos da frequência do sinal  $\omega_s$ , todas com  $\gamma = 1/65 = 0.015385$ ,  $\alpha = 0.1$ . As amplitudes do sinal e do idler foram obtidas de transformadas de Fourier de séries temporais estacionárias. Os resultados foram praticamente idênticos aos obtidos no ODPF 1 com os mesmos parâmetros.

Nas Figs. 5.18-5.20, plotamos os ganhos do sinal e do idler em termos da frequência do sinal  $\omega_s$ , todas com  $\gamma = 0.1$  e  $\alpha = 0.5$ . Podemos ver que os picos das curvas de ganho diminuem e se alargam com o aumento do coeficiente não-linear  $\alpha$  e da dissipação  $\gamma$  em relação aos resultados com  $\alpha = 0.1$ , como esperado. O único resultado digno de nota dessas 3 figuras é o fato de o ganho do sinal e o do idler ficarem praticamente iguais para  $1.03 < \omega_s < 1.15$ . No entanto, não temos uma teoria ainda sobre por que isso ocorre.

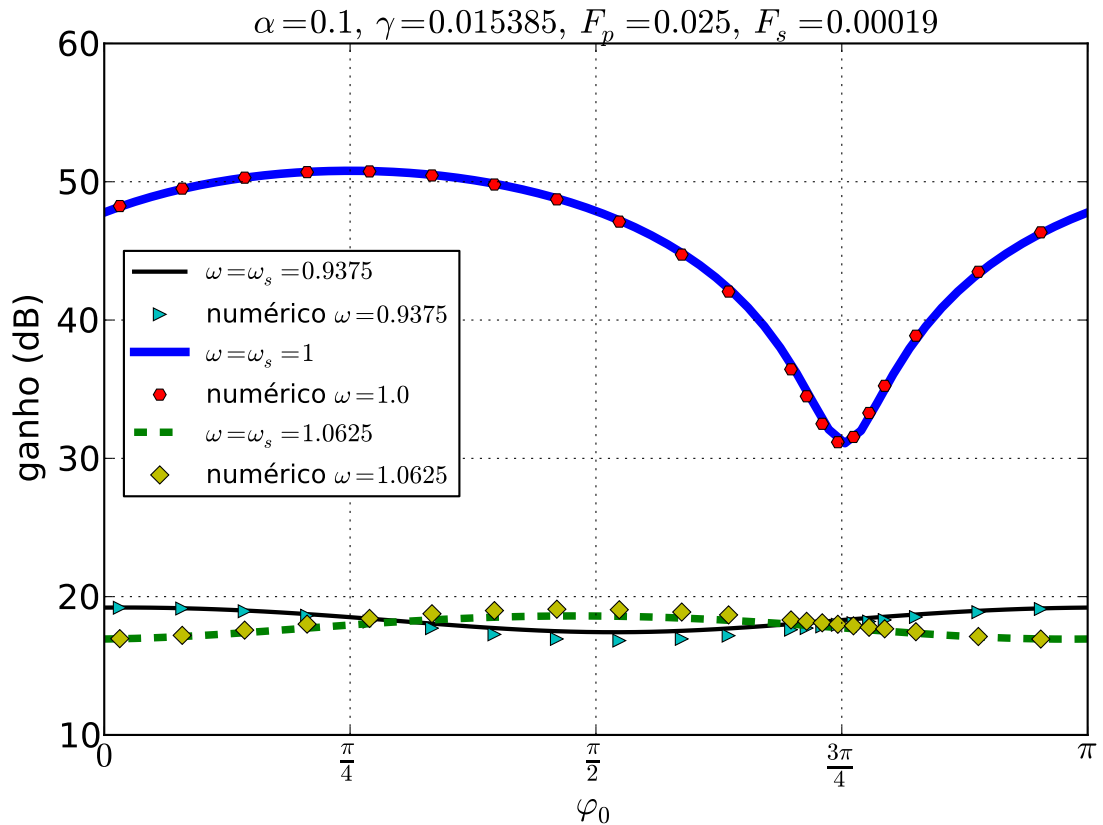


Figura 5.11: Estimativas analíticas e numéricas do ganho do amplificador paramétrico em relação à resposta do oscilador harmônico em função da fase. O ganho analítico foi obtido a partir da Eq. (5.16), enquanto o ganho numérico foi obtido via integração numérica da Eq. (5.13), utilizando os valores estacionários de  $U(t)$  e  $V(t)$  quando  $t = 2n\pi/\omega$  na transformação definida na Eq. (2.15). Em seguida, tais valores foram substituídos na expressão  $20 \log_{10} \frac{\sqrt{U^2+V^2}}{F_s}$ .

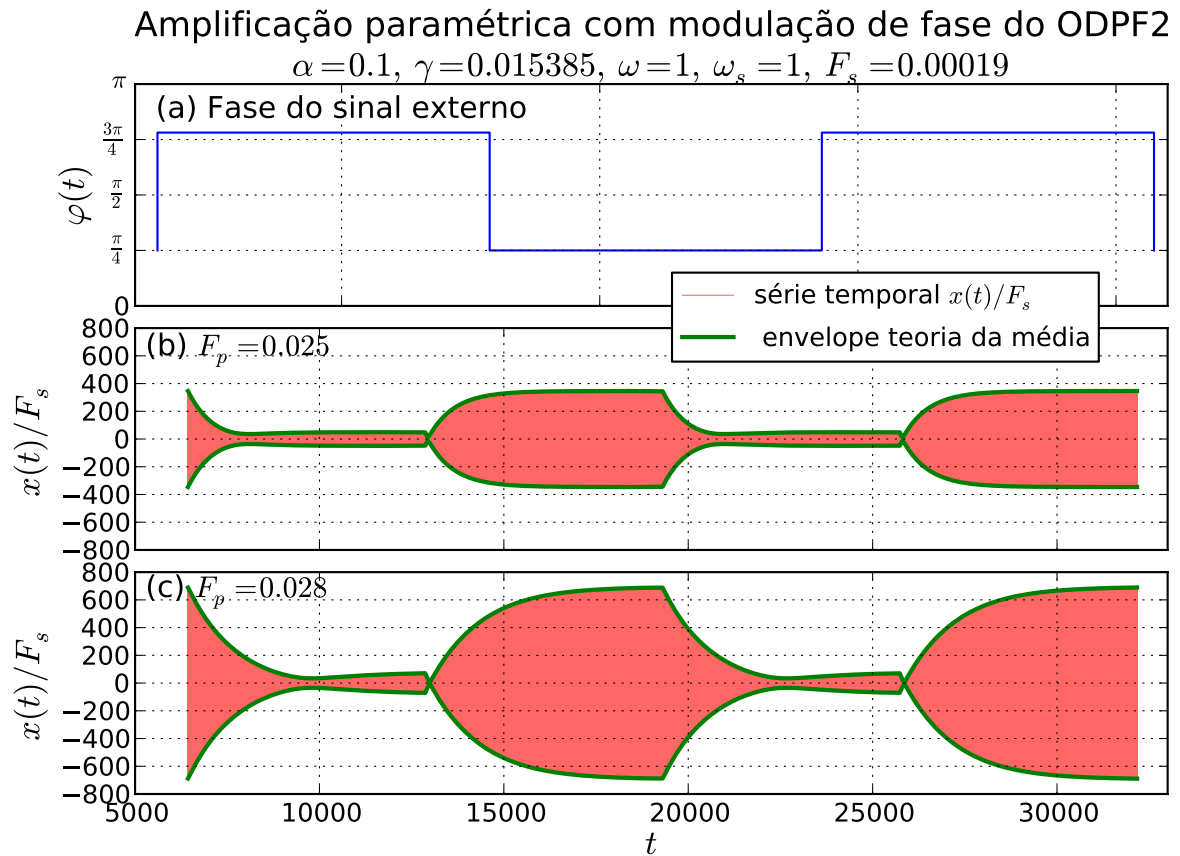


Figura 5.12: AP com a modulação de fase do sinal externo do sistema descrito pela Eq. (5.13). No quadro (a) mostramos a fase do sinal externo em função do tempo, ocorrendo alternância entre as fases  $\pi/4$  e  $3\pi/4$ , cujos ganhos estão de acordo com os resultados da Fig. 5.11. Nos quadros (b) e (c) mostramos o ganho em função do tempo da resposta do AP em relação ao sinal  $F_s$  para diferentes valores de  $F_p$ . A modulação de fase da AP do ODPF 2 em ambos quadros mostram a série temporal obtida mediante integração numérica da Eq.(5.13) e a envelope via teoria da média, obtida mediante integração numérica do sistema EDO dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b), sendo tal método utilizado para poder capturar o efeito de modulação de fase do sinal externo.

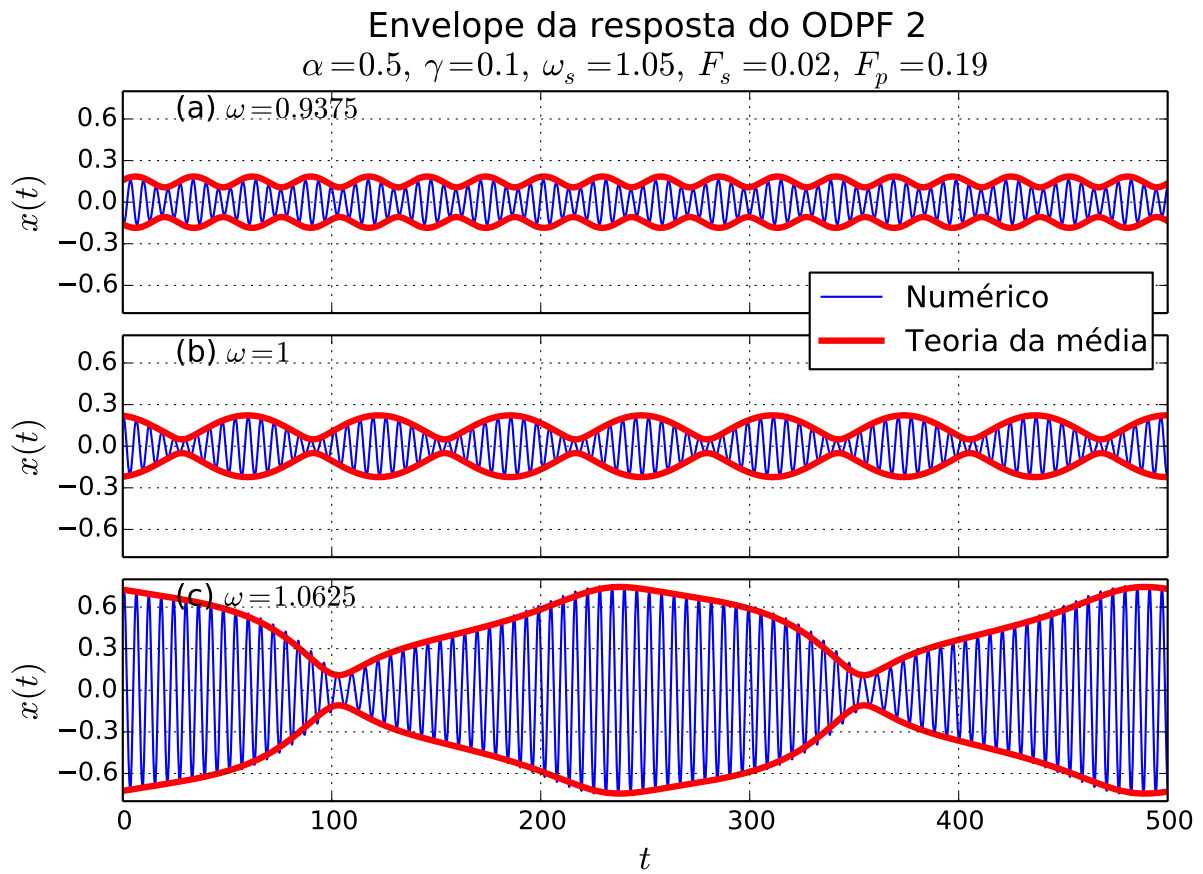


Figura 5.13: Série temporal para AP do ODPF 1 obtida numericamente a partir da Eq. (5.13) e a envelope analítica dada por  $\sqrt{u(t)^2 + v(t)^2}$  que obtemos do sistema aproximado autônomo dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b) nas frequências  $\omega = 0.9375$ ,  $\omega = 1.0$  e  $\omega = 1.0625$ . Nos quadros a) e b) observamos as simetrias de translação, reflexão e de inversão temporal. No quadro c) apresenta uma quebra de simetria de inversão temporal.

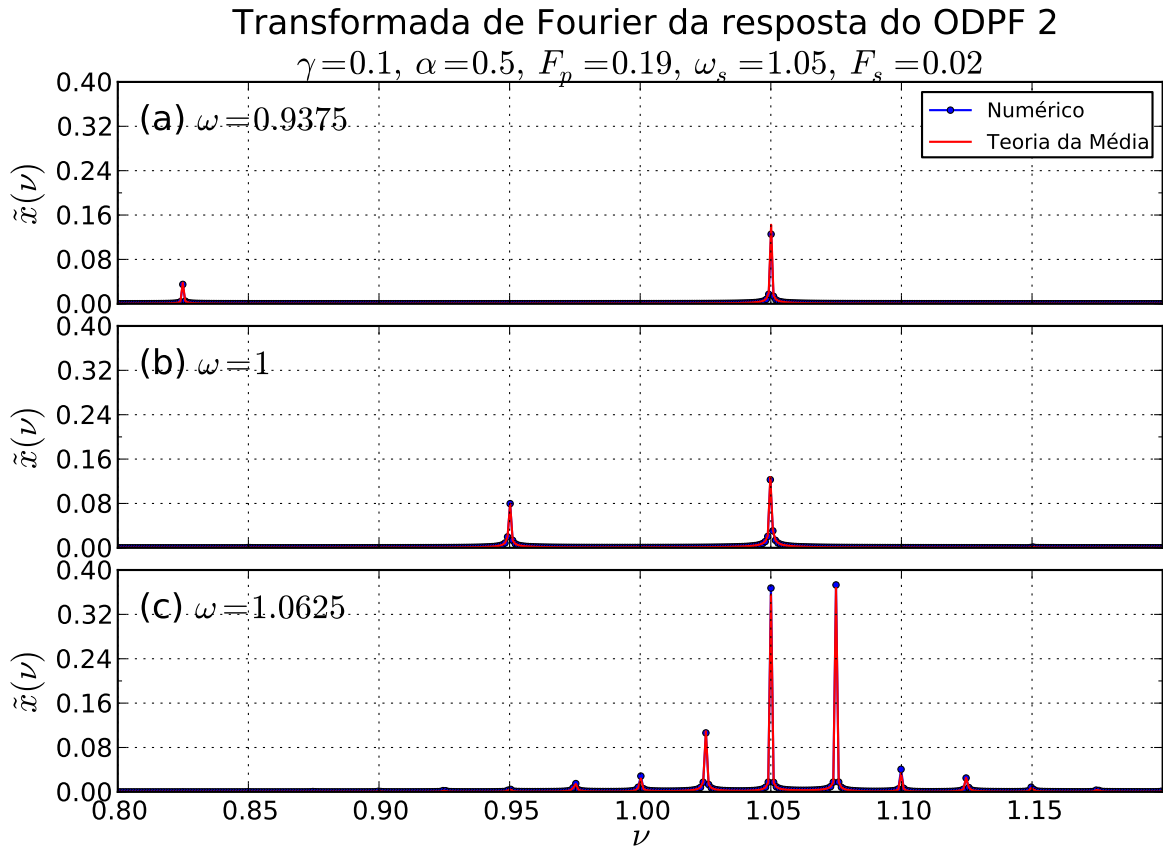


Figura 5.14: Transformada de Fourier para a AP do ODPF 2 obtida numericamente a partir da Eq. (5.13) dada pelo valor dos picos nas frequências  $\omega = 0.9375$ ,  $\omega = 1$  e  $\omega = 1.0625$  comparada com o resultado analítico dado pelas Eqs. (5.14a)-(5.14b).

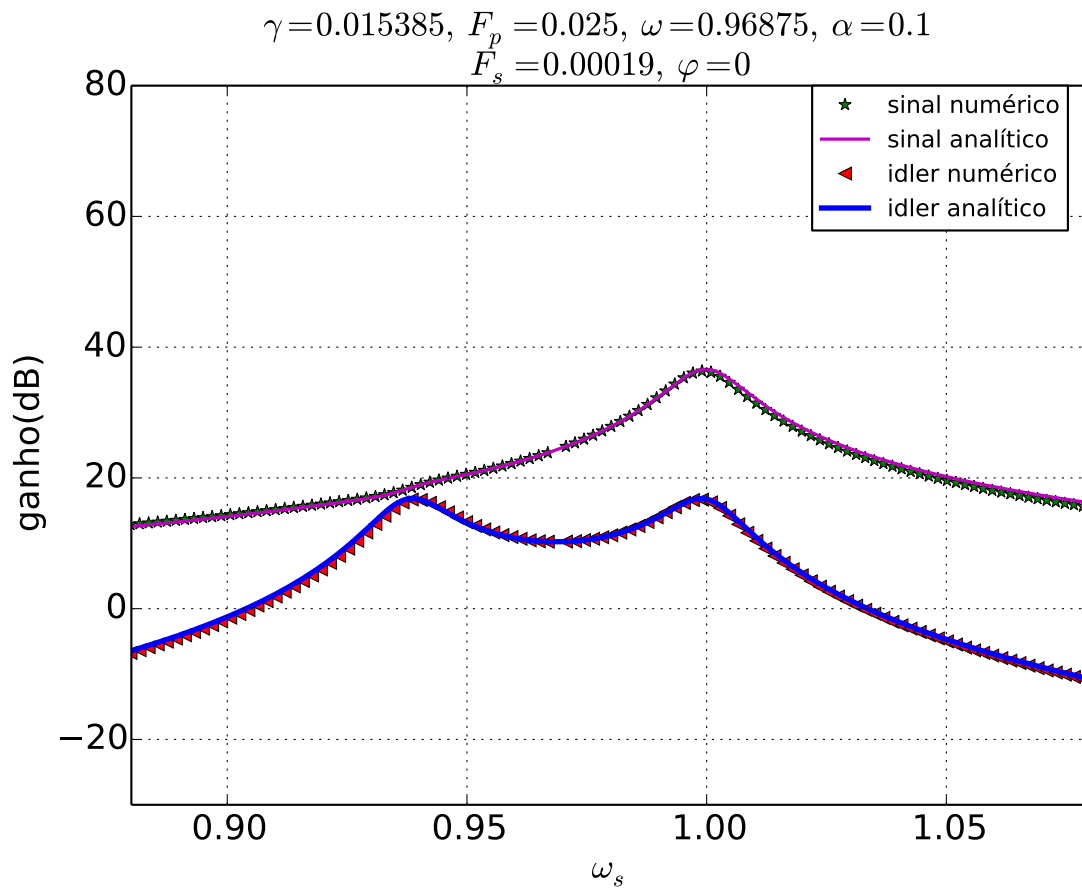


Figura 5.15: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 36(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 65$ .



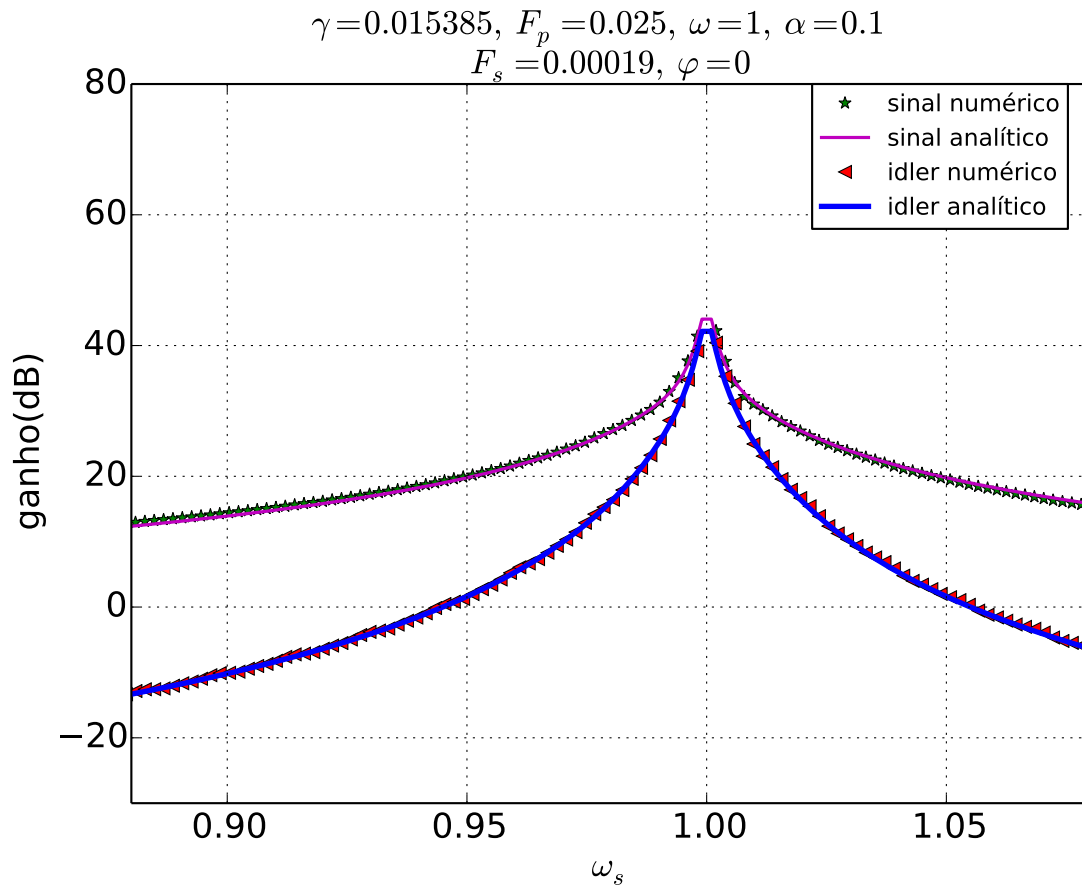


Figura 5.16: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 45(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ .

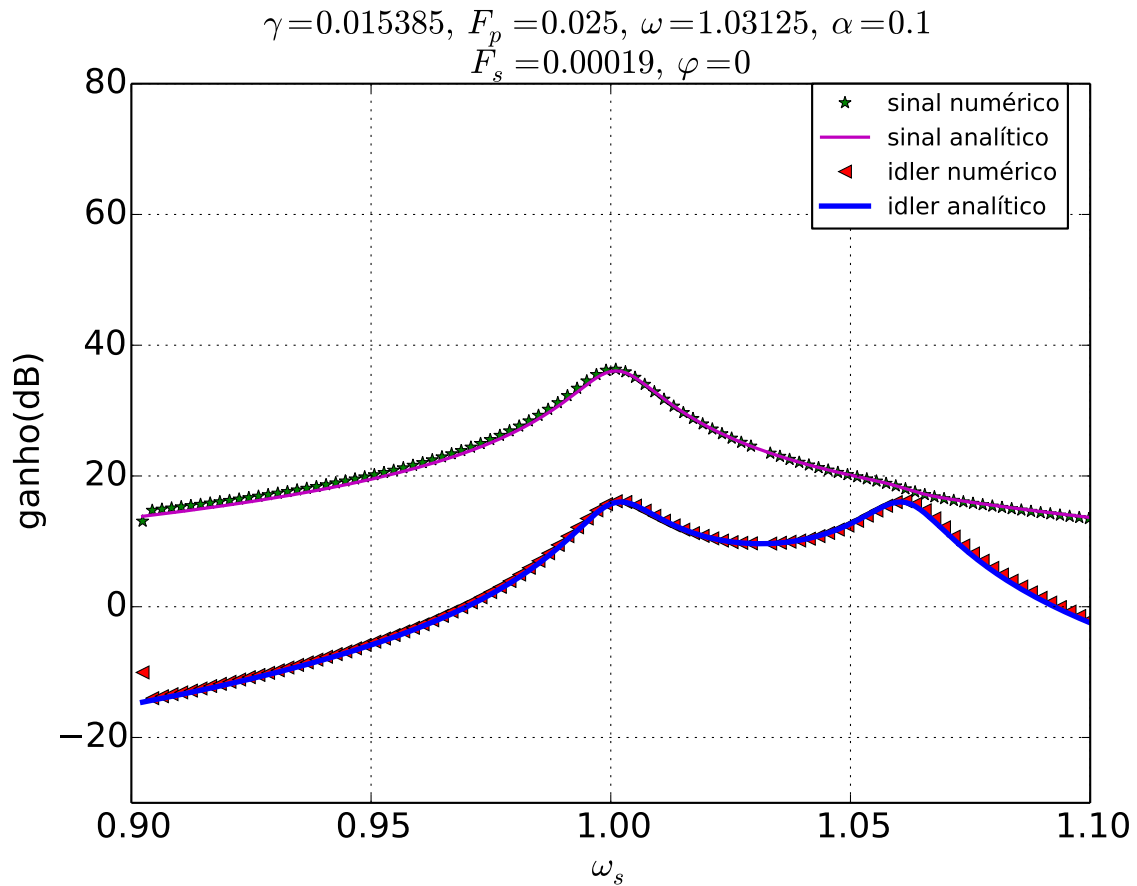


Figura 5.17: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 36(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 65$ .

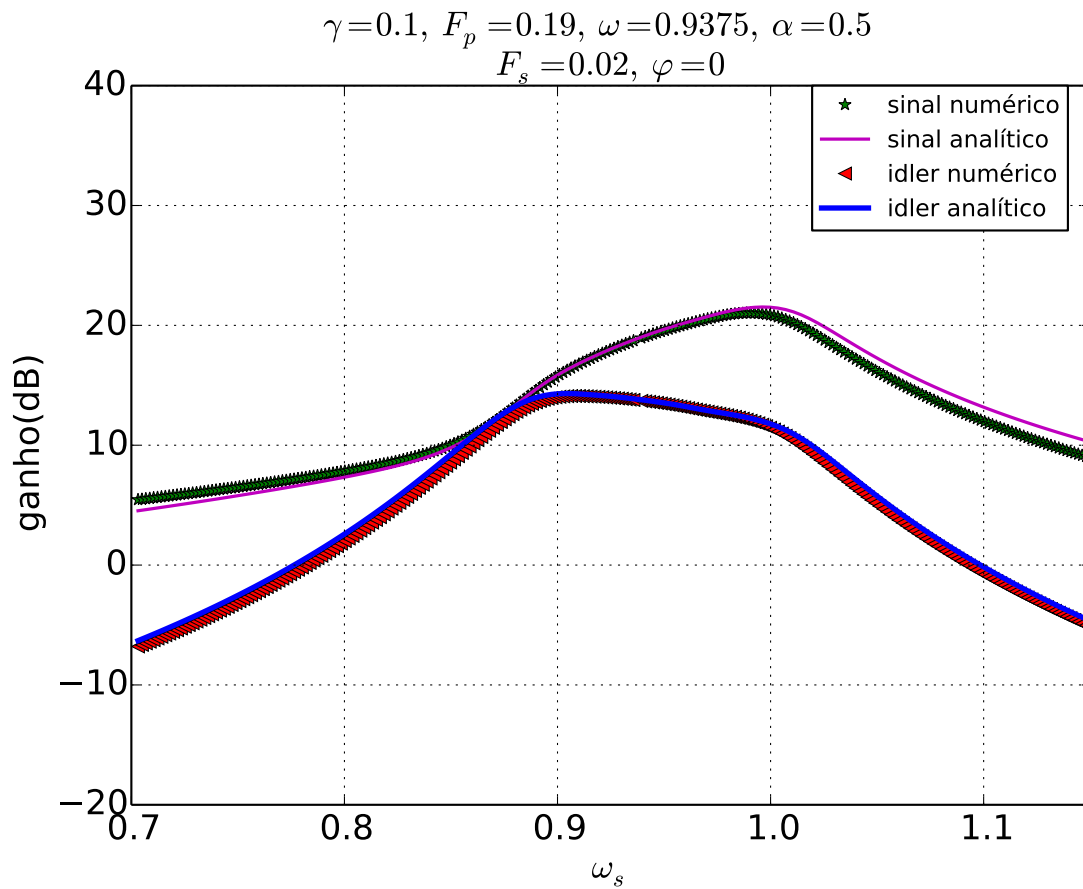


Figura 5.18: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 21(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , o que é basicamente o ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 10$ .

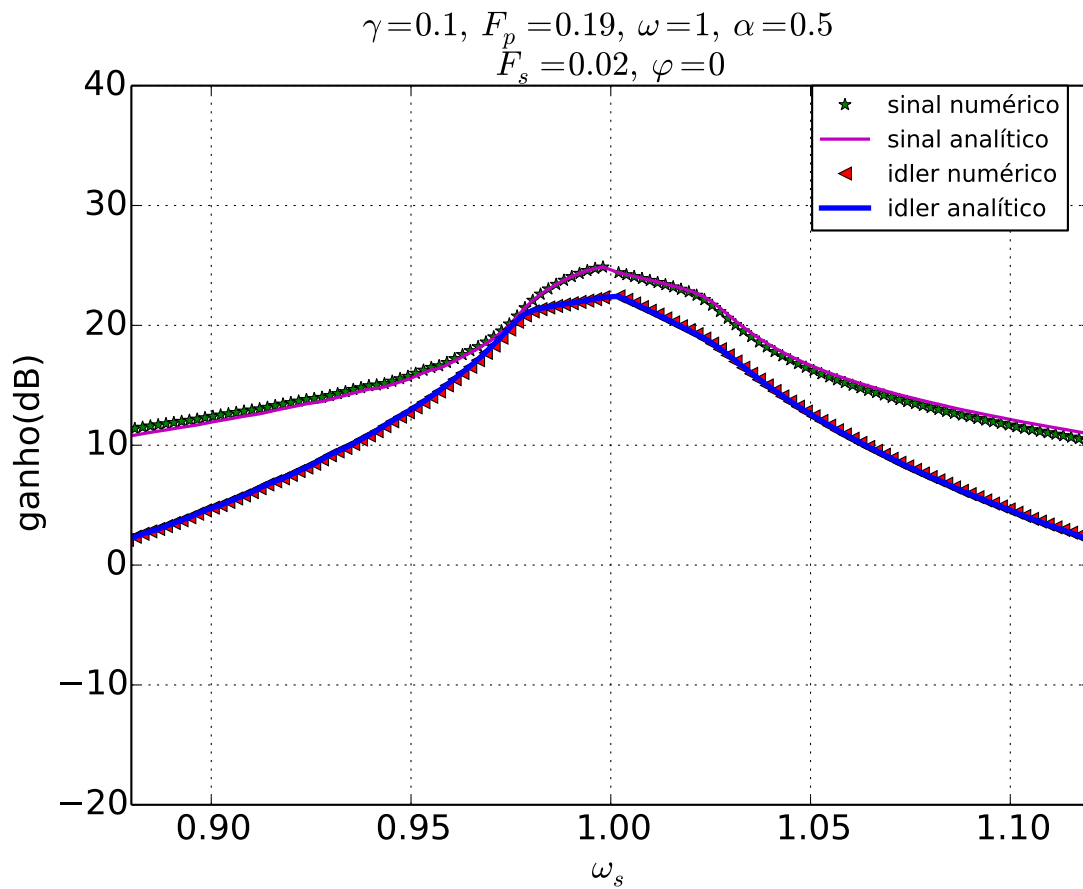


Figura 5.19: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 25(dB)$  em  $\omega_s = 1.0$ , um pouco acima do ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 10$ .

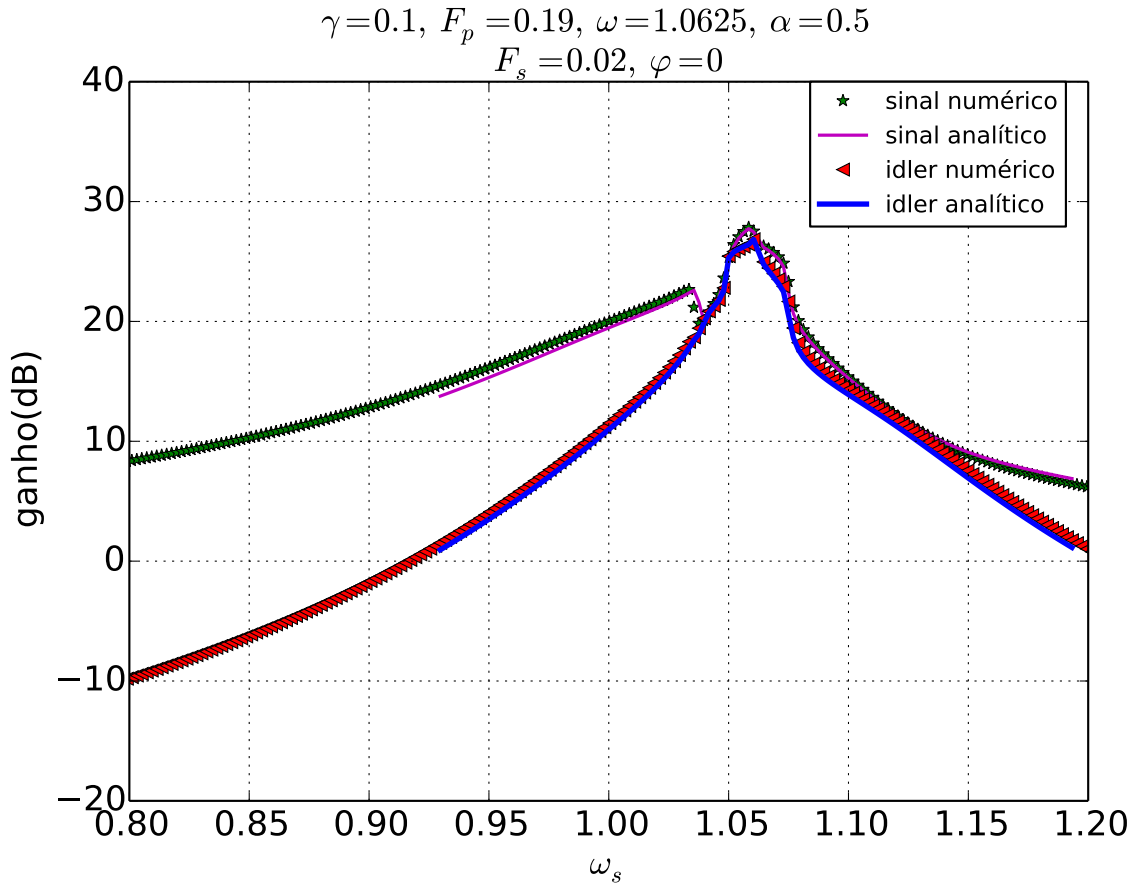


Figura 5.20: Resposta do ganho do sinal dado pela Eq. (5.20) com e do idler dado pela Eq. (5.21) do ODPF 2 em função da frequência angular do sinal externo  $\omega_s$ . Obtemos ótima concordância entre os resultados obtidos a partir da integração numérica da Eq. (5.13) e dos resultados semi-analíticos da integração numérica das Eqs. (5.14a-b). Obtemos um pico de ganho para o sinal de  $\approx 28(dB)$  em  $\omega_s \approx 1.06$ , um pouco acima do ganho máximo do oscilador harmônico para  $Q = 10$  em  $\omega_s = 1$ .

### 5.3 Conclusão

Estudamos nesse capítulo a AP nos osciladores não-lineares parametricamente forçados ODPF 1 e ODPF 2. Em ambos sistemas, aplicamos a teoria da média seguida do método do balanço harmônico para obtermos expressões analíticas para o ganho da resposta do oscilador a um pequeno estímulo senoidal externo. Em ambos os casos, obtivemos séries temporais e transformadas de Fourier numericamente. Em todos os casos, obtivemos excelente concordância entre os resultados teóricos aproximados e os correspondentes resultados numéricos. Vimos que quando o bombeamento paramétrico está abaixo do limiar de instabilidade e há sintonia entre o sinal externo  $\omega$  e a frequência de bombeamento paramétrico, ou seja, na AP degenerada quando  $\omega = \omega_s$ , o ganho continua bastante sensível à fase. Quando esses osciladores não-lineares são estimulados na região

de instabilidade, observamos que há um limite superior para o ganho, diferentemente do que ocorre com o AP linear acima do limiar da instabilidade. Mesmo possuindo essa limitação, os ODPFs 1 e 2 podem apresentar grandes ampliações.

Vimos também que esses amplificadores podem ser utilizados para a transmissão de informação, pois apresentam ganhos bastante sensíveis à fase entre o sinal e o bombeamento. Mostramos que mesmo com a não-linearidade dos osciladores pode ocorrer transmissão de informação via resposta do oscilador a um sinal externo no qual a informação é transportada via modulação de fase. A resposta do amplificador a um sinal com modulação de fase apresenta modulação de amplitude. Verificamos que a envelope desse sinal com modulação de amplitude pode ser obtida pela teoria da média com excelente precisão.

Em seguida, observamos novamente que quando há dessintonia entre o sinal externo e o bombeamento, com a amplitude de bombeamento abaixo do limiar de instabilidade, a resposta de qualquer um dos osciladores não-lineares ao estímulo externo apresenta basicamente duas componentes espectrais: o sinal e o idler. Obtivemos várias curvas de ganho para o sinal e o idler, em todos os casos os resultados teóricos apresentaram ótima concordância com os resultados numéricos. Podendo ser amplificadores de alto ganho como mostrado na Ref. [30].

No caso do ODPF 2, observamos uma quebra de simetria de inversão temporal, o que indica que houve uma bifurcação de quebra de simetria. No entanto, o estudo detalhado dessa bifurcação está além dos métodos analíticos utilizados aqui. De toda forma, vimos que aparecem vários outros picos espectrais além do sinal e do idler e esses picos foram previstos pela teoria da média, assim como também pudemos capturar a envelope da resposta do ODPF2 ao sinal externo.

## Dímero Parametricamente Forçado

Neste capítulo, investigamos a dinâmica de um dímero composto por dois osciladores harmônicos acoplados elasticamente entre si, parametricamente forçados e amortecidos. A motivação deste estudo é compreender os efeitos de batimento em transientes do dímero parametricamente excitado, bem como analisar a ressonância paramétrica e a AP nesse sistema. Especificamente, investigamos a possibilidade de desenvolvimento de um amplificador paramétrico facilmente sintonizável e com altos ganhos em uma faixa de frequência mais larga que a de um único AP.

Na seção 6.1, utilizamos uma transformação canônica para desacoplar as equações de movimento dos dois osciladores parametricamente forçados e obter seus modos normais de vibração. Investigamos a situação em que ambos osciladores têm o mesmo coeficiente de dissipação e o mesmo bombeamento. Na seção 6.2, analisamos esses modos normais de vibração utilizando o método da teoria da média para obter a linha de transição para a instabilidade paramétrica do dímero. Na seção 6.3, obtemos as envelopes para séries temporais do dímero paramétrico utilizando o método da média. Na seção 6.4, investigamos o fenômeno da amplificação paramétrica no dímero.

### 6.1 Dímero Parametricamente Forçado

Nesta seção, estudamos um sistema de dois osciladores harmônicos acoplados e parametricamente forçados, onde as equações de movimento para as duas partículas que constituem o dímero são dadas por

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 x_1 - \beta(x_1 - x_2) - \gamma\dot{x}_1 + F_p \cos(2\omega t)x_1, \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_2^2 x_2 + \beta(x_1 - x_2) - \gamma\dot{x}_2 + F_p \cos(2\omega t)x_2,\end{aligned}\tag{6.1}$$

nas quais  $\omega_i$  é a frequência natural do oscilador com  $i = 1, 2$ ,  $\beta$  é a constante de acoplamento entre os dois osciladores,  $\gamma$  é a taxa de dissipação,  $F_p$  é a amplitude do bombeamento paramétrico,  $2\omega$  é a frequência do bombeamento.

Com a seguinte transformação

$$x_i(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} y_i(t), \quad (6.2)$$

podemos eliminar os termos dissipativos da Eq. (6.1) obtendo o sistema de equações diferenciais acopladas a seguir

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -(\omega_1^2 - \frac{\gamma^2}{4} + \beta)y_1 + \beta y_2 + F_p \cos(2\omega t)y_1, \\ \ddot{y}_2 &= \beta y_1 - (\omega_2^2 - \frac{\gamma^2}{4} + \beta)y_2 + F_p \cos(2\omega t)y_2. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Escrevendo o sistema (6.3) na forma matricial, obtemos

$$\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + F_p \cos(2\omega t) \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

em que fazemos  $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \varepsilon$  e  $\omega_2^2 = \omega_0^2 - \varepsilon$ . Realizamos essa substituição na matriz  $A$  dada na Eq. (6.4), de modo que obtemos

$$A = \begin{bmatrix} \Lambda - \varepsilon & \beta \\ \beta & \Lambda + \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

em que  $\Lambda = -\omega_0^2 + \gamma^2/4 - \beta$ . Os autovalores dessa matriz são dados por  $\lambda_{\pm} = \Lambda \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2}$ . Como essa matriz é simétrica e não singular, ela é diagonalizável, seus autovalores são reais e seus autovetores são ortogonais. Em seguida, realizamos a seguinte transformação

$$y = Sz, \quad y \doteq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad z \doteq \begin{bmatrix} z_- \\ z_+ \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

em que a matriz  $S$  é escolhida de modo que  $S^{-1}AS = D$  seja a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_- & 0 \\ 0 & \lambda_+ \end{bmatrix}. \quad (6.7)$$

Assim, a matriz  $S$  pode ser escrita como  $S = [v_- v_+]$ , em que  $Av_{\pm} = \lambda_{\pm} v_{\pm}$ . Desse modo obtemos

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2}}{\beta} & \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \beta^2}}{\beta} \end{bmatrix}, \quad (6.8)$$



cuja matriz inversa é dada por

$$S^{-1} = \frac{\beta}{2\sqrt{\epsilon^2 + \beta^2}} \begin{bmatrix} \frac{\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \beta^2}}{\beta} & -1 \\ \frac{-\epsilon + \sqrt{\epsilon^2 + \beta^2}}{\beta} & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

Após realizarmos as transformações da Eq. (6.6), encontramos as equações dos modos normais do dímero, que são dadas por

$$\begin{aligned} \ddot{z}_- &= \lambda_- z_- + F_p \cos(2\omega t) z_-, \\ \ddot{z}_+ &= \lambda_+ z_+ + F_p \cos(2\omega t) z_+. \end{aligned} \quad (6.10)$$

## 6.2 Linha de Transição de Instabilidade - Teoria da Média

Talvez o teste mais elementar e relevante que podemos fazer da efetividade de nosso método da média para analisar a dinâmica do [dímero parametricamente forçado \(DPF\)](#) é encontrar a sua linha de transição para instabilidade. Realizamos isso ao aplicar o método da média para obtermos soluções aproximadas das Eqs. (6.11). Com a notação  $\Omega_{\pm} = -\lambda_{\pm} - \omega^2$ , onde  $\Omega \approx O(\epsilon)$  obtemos

$$\ddot{z}_{\pm} + \omega^2 z_{\pm} = -\Omega_{\pm} z_{\pm} + F_p \cos(2\omega t) z_{\pm}. \quad (6.11)$$

Com a seguinte transformação, passamos para as coordenadas que variam lentamente com o tempo

$$z_- = U_- \cos(\omega t) - V_- \sin(\omega t), \quad (6.12)$$

$$z_+ = U_+ \cos(\omega t) - V_+ \sin(\omega t), \quad (6.13)$$

e após a aplicação da técnica da média, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\pm} &= -\frac{1}{2\omega} \left[ \left( \frac{F_p}{2} + \Omega_{\pm} \right) v_{\pm} \right], \\ \dot{v}_{\pm} &= -\frac{1}{2\omega} \left[ \left( \frac{F_p}{2} - \Omega_{\pm} \right) u_{\pm} \right], \end{aligned} \quad (6.14)$$

onde  $U_{\pm}(t)$  e  $V_{\pm}(t)$  foram substituídas por suas respectivas médias  $u_{\pm}(t)$  e  $v_{\pm}(t)$ . Resolvendo as Eqs. (6.14) obtemos as soluções

$$\begin{aligned} u_{\pm}(t) &= u_{\pm}(0) \cosh(\kappa_{\pm}t) + \left(\frac{B - \delta_{\pm}}{\kappa_{\pm}}\right) v_{\pm}(0) \sinh(\kappa_{\pm}t), \\ v_{\pm}(t) &= v_{\pm}(0) \cosh(\kappa_{\pm}t) + \left(\frac{B + \delta_{\pm}}{\kappa_{\pm}}\right) u_{\pm}(0) \sinh(\kappa_{\pm}t), \end{aligned} \quad (6.15)$$

sendo  $\kappa_{\pm} = \sqrt{B^2 - \delta_{\pm}^2}$ , onde  $B = -F_p/4\omega$  e  $\delta_{\pm} = \Omega_{\pm}/2\omega$ .

Utilizando as transformações dadas nas Eqs. (6.2) e (6.6), podemos escrever a solução aproximada do sistema das Eqs. (6.1) da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\frac{-\gamma t}{2}} \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_-(t) & -v_-(t) \\ u_+(t) & -v_+(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \text{sen}(\omega t) \end{bmatrix}. \quad (6.16)$$

Quando o crescimento dado nas Eqs. (6.15) exatamente cancela o decaimento exponencial na Eq.(6.16) obtemos a linha de transição para a primeira zona de instabilidade paramétrica [20], que é determinada pelas seguintes duas equações

$$(\gamma\omega)^2 = \left(\frac{F_p}{2}\right)^2 - \Omega_{\pm}^2. \quad (6.17)$$

Na Fig. 6.1 mostramos diversas linhas de transição para instabilidade paramétrica no dímero obtidas pela teoria da média em primeira ordem e pela integração numérica das Eqs. (6.1), em que utilizamos o algoritmo RK4. Observamos que à medida que aumentamos o parâmetro de acoplamento  $\beta$  a região de instabilidade se bifurca. Cada mínimo ocorre em torno das frequências de ressonância dos modos normais. Isso indica que podemos utilizar esses baixos limiares para instabilidade paramétrica para desenvolvermos amplificadores paramétricos sintonizáveis.

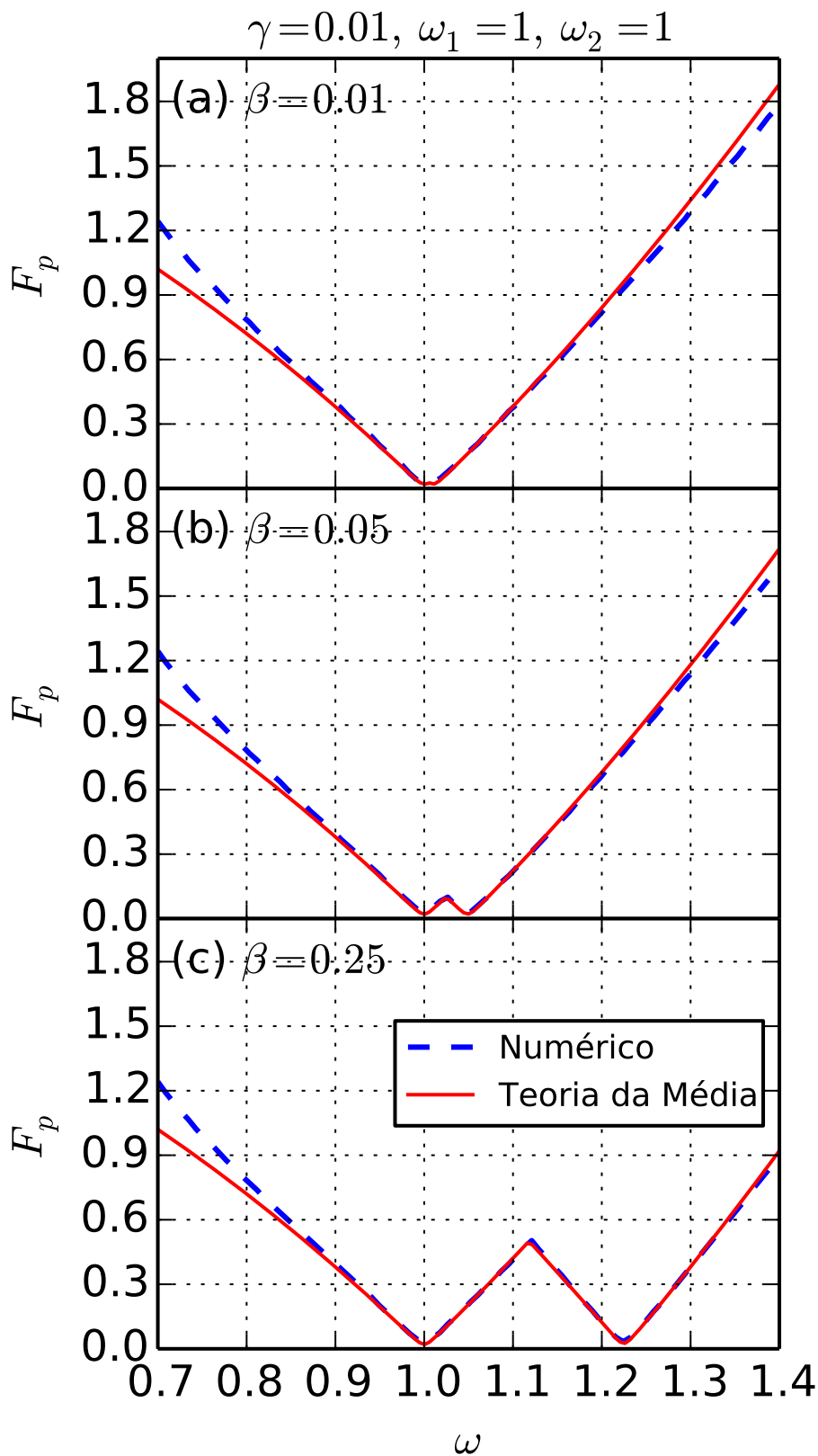


Figura 6.1: Comparação entre as previsões do método numérico e pela técnica da média da linha de transição para instabilidade paramétrica dada pela equação (6.17) que descreve os osciladores harmônicos parametricamente acoplados para  $\beta = 0.01, 0.05, 0.25$ .

### 6.3 Envelopes

Da mesma forma que fizemos antes para o OPF e o AP, podemos utilizar o método da média para obter transientes do DPF. Esse conhecimento analítico dos transientes é importante, por exemplo, para se obter a função de Green do dímero. Com as funções de Green pode-se então calcular a resposta do DPF para praticamente qualquer excitação aditiva. É importante mencionar também que uma vez que tenhamos obtido transientes analiticamente, podemos então obter as correspondentes envelopes, que por sua vez são essenciais para aplicações do DPF a sistemas de telecomunicação.

Veremos a seguir como obter as envelopes de transientes do DPF. Das Eqs. (6.2) e (6.6) obtemos

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{\frac{-\gamma t}{2}} S \begin{bmatrix} z_-(t) \\ z_+(t) \end{bmatrix}, \quad (6.18)$$

onde

$$z_{\pm}(t) = u_{\pm}(t) \cos(\omega t) - v_{\pm}(t) \sin(\omega t), \quad (6.19)$$

Utilizando a Eq.(6.19), reescrevemos a Eq.(6.18) na forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= e^{\frac{-\gamma t}{2}} S \begin{bmatrix} u_-(t) & -v_-(t) \\ u_+(t) & -v_+(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}, \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{u}_1(t) & -\tilde{v}_1(t) \\ \tilde{u}_2(t) & -\tilde{v}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Portanto, as envelopes são dadas por  $r_1(t) = \sqrt{\tilde{u}_1^2(t) + \tilde{v}_1^2(t)}$  e  $r_2(t) = \sqrt{\tilde{u}_2^2(t) + \tilde{v}_2^2(t)}$ . Os valores iniciais são dados por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_-(0) \\ u_+(0) \end{bmatrix} &= S^{-1} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} v_-(0) \\ v_+(0) \end{bmatrix} &= -\frac{1}{\omega} S^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} \dot{x}_1(0) \\ \dot{x}_2(0) \end{bmatrix} + \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Na Fig. 6.2 mostramos séries temporais para o dímero parametricamente forçado obtidas numericamente a partir da Eq. (6.1) com os valores iniciais dados por  $x_1(0) = 1.0$ ,  $\dot{x}_1(0) = x_2(0) = \dot{x}_2(0) = 0.0$ . A envelope analítica foi obtida através do método da média a partir da Eq. (6.20).

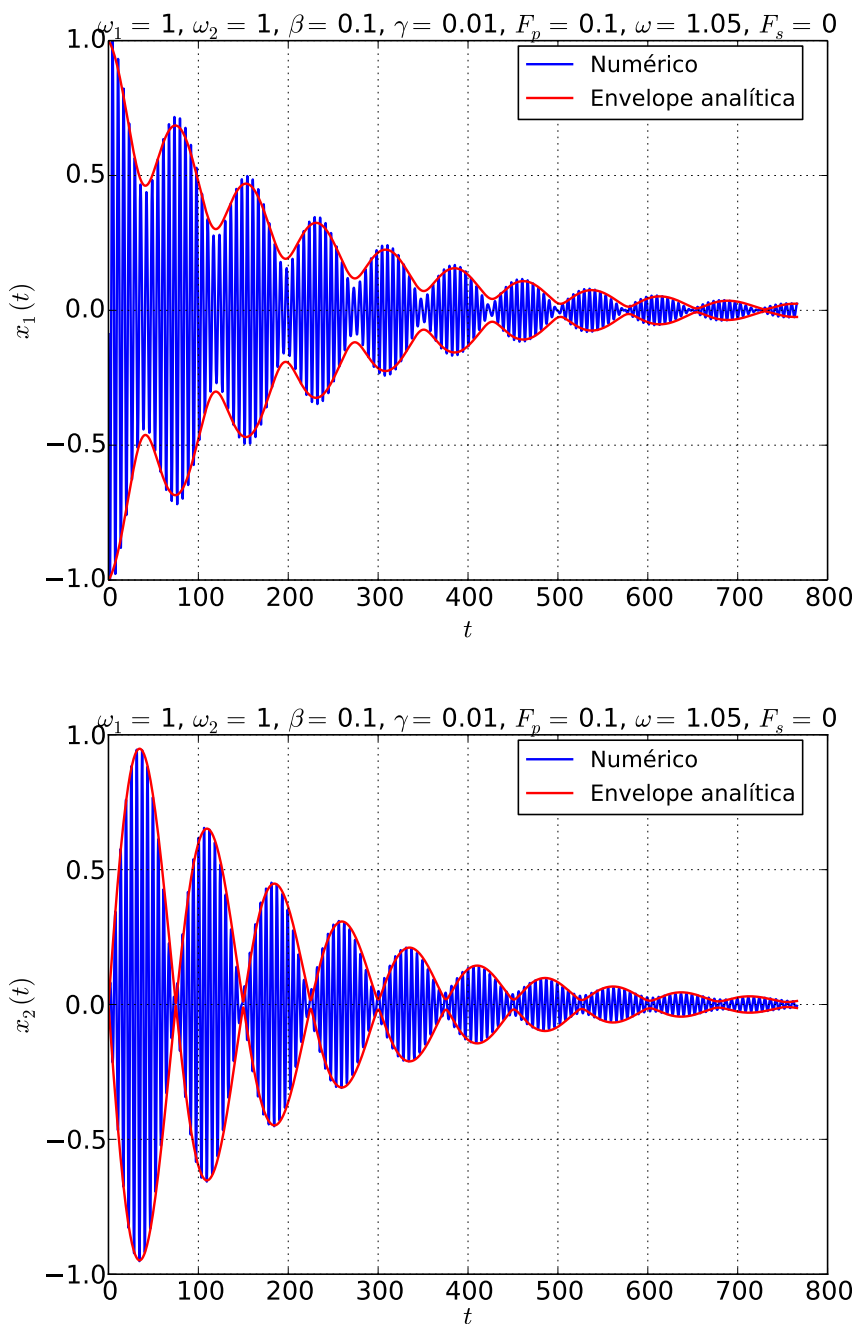


Figura 6.2: Séries temporais para o dímero parametricamente forçado obtidas numericamente a partir da Eq. (6.11) e a envelope analítica a partir da Eq. (6.20) para os dois osciladores.

## 6.4 Amplificação Paramétrica

Vamos investigar agora como calcular o ganho da amplificação paramétrica no DPF. Nosso intuito ao acoplar dois APs é o de desenvolver um amplificador de alto ganho mas com uma largura de banda maior que a de um único AP e que ainda assim possa ser sintonizável. Características essas que faltam aos APs simples.

Com esse objetivo, adicionamos dois sinais externos ao **DPF** dado pela Eq. (6.1) para obtermos o **DAP**, cujas equações de movimento são

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= -\omega_1^2 x_1 - \beta(x_1 - x_2) - \gamma\dot{x}_1 + F_p \cos(2\omega t)x_1 + F_s \cos(\omega_s t + \varphi_1), \\ \ddot{x}_2 &= -\omega_2^2 x_2 + \beta(x_1 - x_2) - \gamma\dot{x}_2 + F_p \cos(2\omega t)x_2 + F_s \cos(\omega_s t + \varphi_2),\end{aligned}\quad (6.22)$$

em que  $F_s$  é a amplitude do sinal externo,  $\omega_s$  é a frequência desse sinal externo a ser detectado e  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são as fases do sinal externo como detectado em cada entrada do **DAP**. A resposta estacionária do **DAP** à excitação harmônica externa de acordo com o método do balanço em primeira ordem pode ser escrita como

$$\begin{aligned}x_1(t) &= u_s e^{i\omega_s t} + u_i e^{i(\omega - \delta)t} + c.c., \\ x_2(t) &= v_s e^{i\omega_s t} + v_i e^{i(\omega - \delta)t} + c.c.,\end{aligned}\quad (6.23)$$

onde  $\delta = \omega_s - \omega$ ,  $\omega_i = \omega - \delta$  e  $\omega_s = \omega + \delta$ . Ao substituirmos as Eqs. (6.23) nas Eqs. (6.22), encontramos o seguinte sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned}(\omega_1^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega_s)u_s + \beta(u_s - v_s) &= \frac{F_p}{2}u_i^* + \frac{F_s e^{i\varphi_1}}{2}, \\ (\omega_1^2 - \omega_i^2 + i\gamma\omega_i)u_i + \beta(u_i - v_i) &= \frac{F_p}{2}u_s^*, \\ (\omega_2^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega_s)v_s + \beta(v_s - u_s) &= \frac{F_p}{2}v_i^* + \frac{F_s e^{i\varphi_2}}{2}, \\ (\omega_2^2 - \omega_i^2 + i\gamma\omega_i)v_i + \beta(v_i - u_i) &= \frac{F_p}{2}v_s^*.\end{aligned}\quad (6.24)$$

Simplificamos as equações acima com as seguintes relações

$$\begin{aligned}\Lambda_s &\doteq \omega_1^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega_s + \beta, & \Lambda_i &\doteq \omega_1^2 - \omega_i^2 + i\gamma\omega_i + \beta, \\ \Xi_s &\doteq \omega_2^2 - \omega_s^2 + i\gamma\omega_s + \beta, & \Xi_i &\doteq \omega_2^2 - \omega_i^2 + i\gamma\omega_i + \beta.\end{aligned}\quad (6.25)$$

Com essas simplificações podemos reescrever as Eqs. (6.24) como

$$\Lambda_s u_s - \beta v_s = \frac{F_p}{2}u_i^* + \frac{F_s}{2}e^{i\varphi_1},\quad (6.26)$$

$$\Lambda_i u_i - \beta v_i = \frac{F_p}{2}u_s^*,\quad (6.27)$$

$$\Xi_s v_s - \beta u_s = \frac{F_p}{2}v_i^* + \frac{F_s}{2}e^{i\varphi_2},\quad (6.28)$$

$$\Xi_i v_i - \beta u_i = \frac{F_p}{2}v_s^*.\quad (6.29)$$

Utilizando as Eqs. (6.26) e a (6.28) obtemos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_s & -\beta \\ -\beta & \Xi_s \end{bmatrix}}_{=A_s} \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \frac{F_p}{2} \begin{bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \end{bmatrix} + \frac{F_s}{2} \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} \\ e^{i\varphi_2} \end{bmatrix}. \quad (6.30)$$

Utilizando as Eqs. (6.27) e a (6.29) encontramos

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Lambda_i & -\beta \\ -\beta & \Xi_i \end{bmatrix}}_{=A_i} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = \frac{F_p}{2} \begin{bmatrix} u_s^* \\ v_s^* \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Substituindo a resposta do idler da Eq. (6.31) na Eq. (6.30), obtemos a seguinte equação para a resposta do sinal

$$\left[ A_s - \frac{F_p^2}{4} (A_i^{-1})^* \right] \begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \frac{F_s}{2} \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} \\ e^{i\varphi_2} \end{bmatrix}. \quad (6.32)$$

Observamos que caso  $F_s = 0$ , quando temos apenas o DPF, só teremos soluções não triviais na linha de transição para instabilidade, o que corresponde a

$$\det \left[ A_s - \frac{F_p^2}{4} (A_i^{-1})^* \right] = 0.$$

Voltando ao caso em que  $F_s \neq 0$ , encontramos que a resposta ao sinal é dada por

$$\begin{bmatrix} u_s \\ v_s \end{bmatrix} = \frac{F_s}{2} \left[ A_s - \frac{F_p^2}{4} (A_i^{-1})^* \right]^{-1} \begin{bmatrix} e^{i\varphi_1} \\ e^{i\varphi_2} \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Dessa solução estacionária, podemos definir o ganho da resposta do sinal em dB do primeiro oscilador do DAP como

$$G_s = 20 \log \frac{X_s}{F_s}, \quad (6.34)$$

em que  $X_s = |u_s|$  é a amplitude da resposta do sinal quando  $F_p \neq 0$ , com  $u_s$  definido na Eq. (6.23). Similarmente, definimos o ganho da resposta do idler do primeiro oscilador como

$$G_i = 20 \log \frac{X_i}{F_s}, \quad (6.35)$$

em que  $X_i = |u_i|$  é a amplitude da resposta do idler, com  $u_i$  definido na Eq. (6.23).

Na Fig. 6.3 mostramos o ganho do amplificador DAP degenerado em função da fase do oscilador 1. Comparamos com os resultados para 3 valores de fase do oscilador 2. Em comum com o AP simples, temos uma grande variação do ganho em função das fases dos

sinais externos. No entanto, temos uma quebra de simetria do ganho com a fase, o período do ganho agora é  $2\pi$  e não mais  $\pi$  como no caso do AP simples. Devido a uma maior variabilidade na dependência do ganho com as fases, o DAP pode ter mais aplicações que o AP na detecção e demodulação de sinais.

Nas Figs. 6.4-6.5, mostramos séries temporais da AP para o dímero parametricamente forçado obtidas numericamente a partir da Eq. (6.22). Apresentamos também as correspondentes transformadas de Fourier. Os ganhos obtidos estão de acordo com os resultados da Fig. 6.3.

Na Fig. 6.6, apresentamos resultados dos ganhos do sinal e do idler do DAP em função de  $\omega_s$  para diferentes parâmetros de acoplamento  $\beta$ . Esses ganhos foram obtidos dos picos das transformadas de Fourier de  $x_1(t)$  a partir da integração numérica da Eq. (6.22) nas frequências angulares  $\omega_s$  e  $\omega_i$ , sinal e idler, respectivamente. Esses valores de pico foram substituídos nas Eqs. (6.34) e (6.35). Vemos que o valor de pico da amplificação depende substancialmente do parâmetro  $\beta$ .

Na Fig. 6.7, plotamos o ganho do sinal em termos do parâmetro de acoplamento  $\beta$  para diferentes valores de frequência do sinal  $\omega_s$ . Os diferentes picos são devidos aos diferentes valores de uma das frequências dos modos normais do DPF.

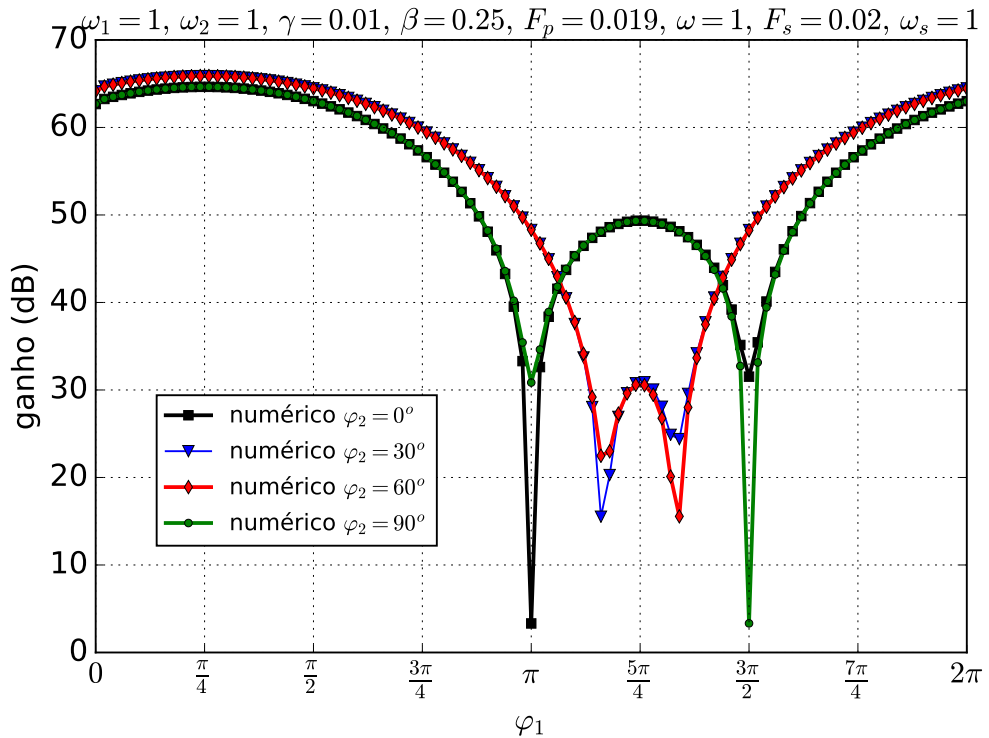


Figura 6.3: Ganho numérico como uma função da fase  $\varphi_1$  a partir da Eq. (6.34), mostrando que o dímero pode ser usado como um amplificador de banda estreita ajustável e muito sensível à fase. O ganho é obtido do valor do pico da transformada de Fourier de séries temporais estacionárias em  $\omega$ .



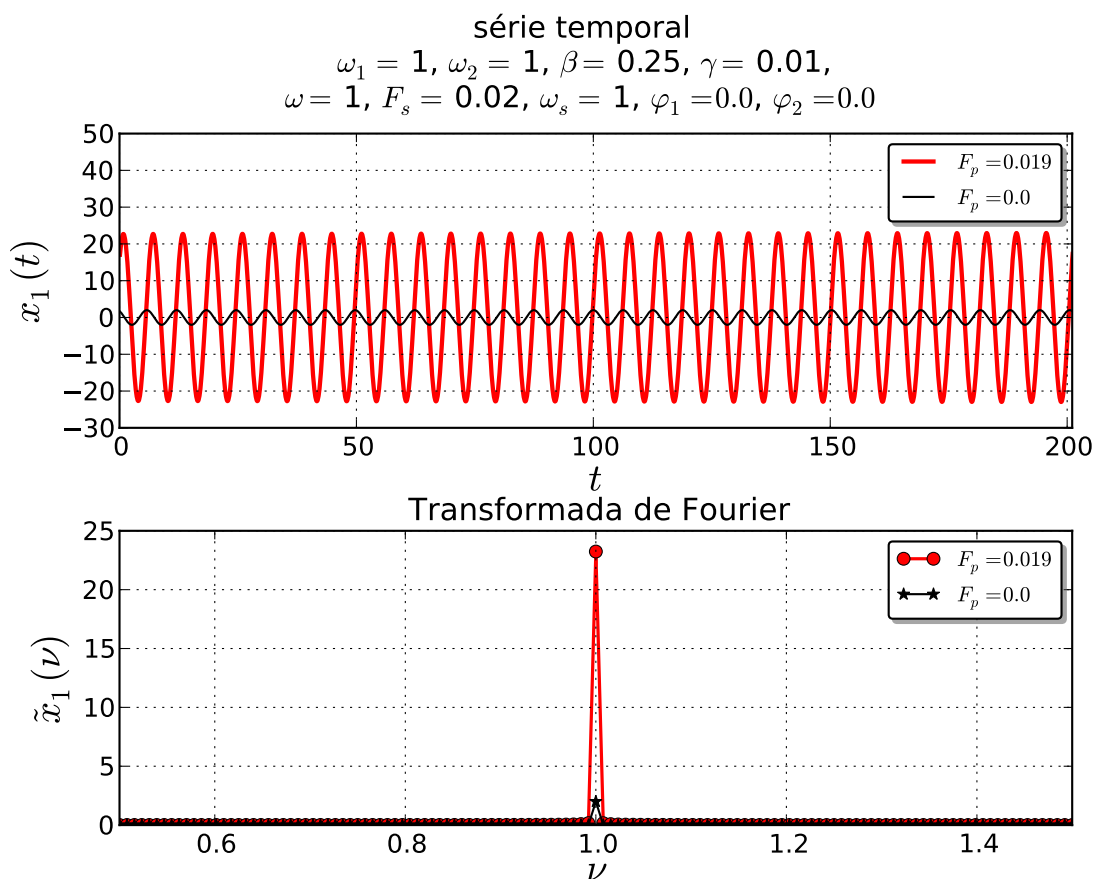


Figura 6.4: (a) Séries temporais para AP do dímero parametricamente forçado obtidas a partir da integração numérica da Eq. (6.22). (b) Transformadas de Fourier correspondentes. Em ambos os quadros, a linha vermelha indica a resposta do oscilador com bombeamento paramétrico, enquanto a linha preta indica a resposta do dímero quando não há bombeamento.  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . O ganho em relação à amplitude do sinal externo  $F_s$  é de aproximadamente 62dB, em concordância com a Fig. 6.3

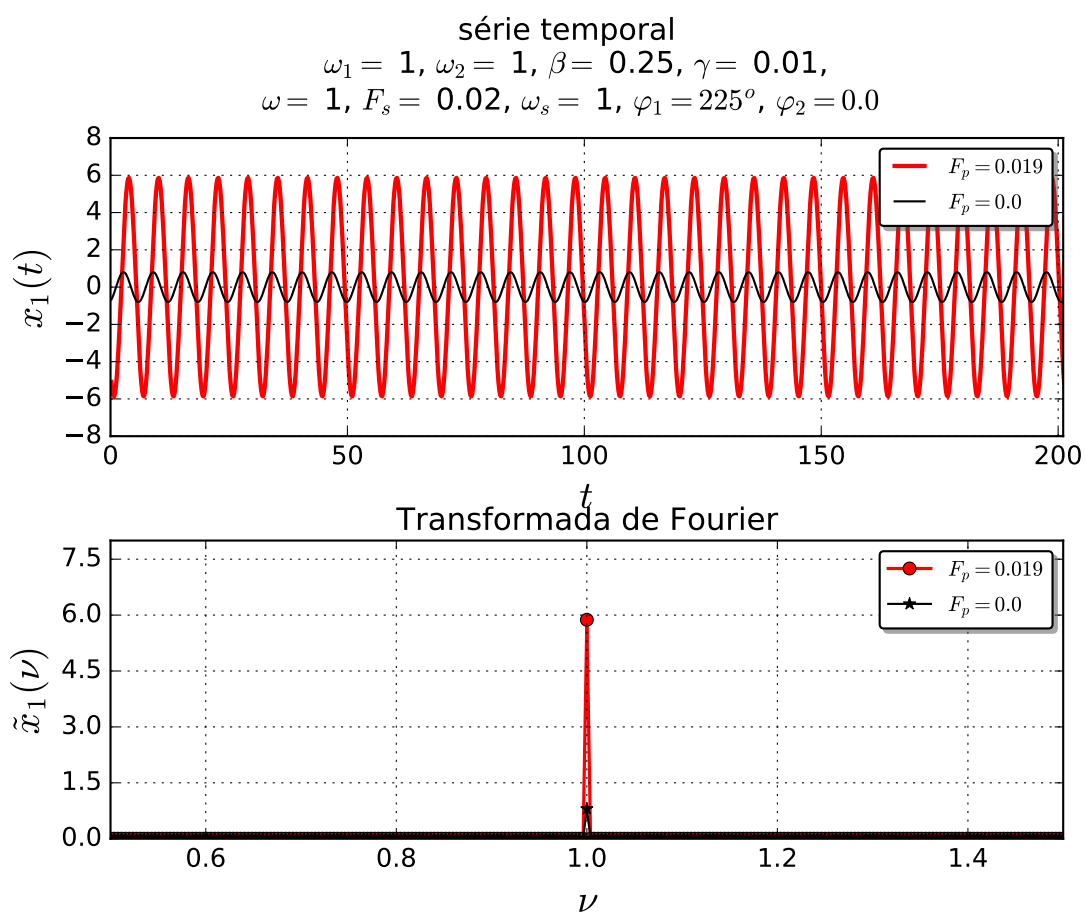


Figura 6.5: Série temporal para AP do dímero parametricamente forçado obtida numericamente a partir da Eq. (6.22) e a transformada de Fourier correspondente. A linha vermelha mostra a resposta do oscilador com bombeamento paramétrico. A linha preta mostra a série temporal quando não há bombeamento. O ganho em relação à amplitude do sinal externo  $F_s$  é de aproximadamente 50dB, em concordância com a Fig. 6.3.

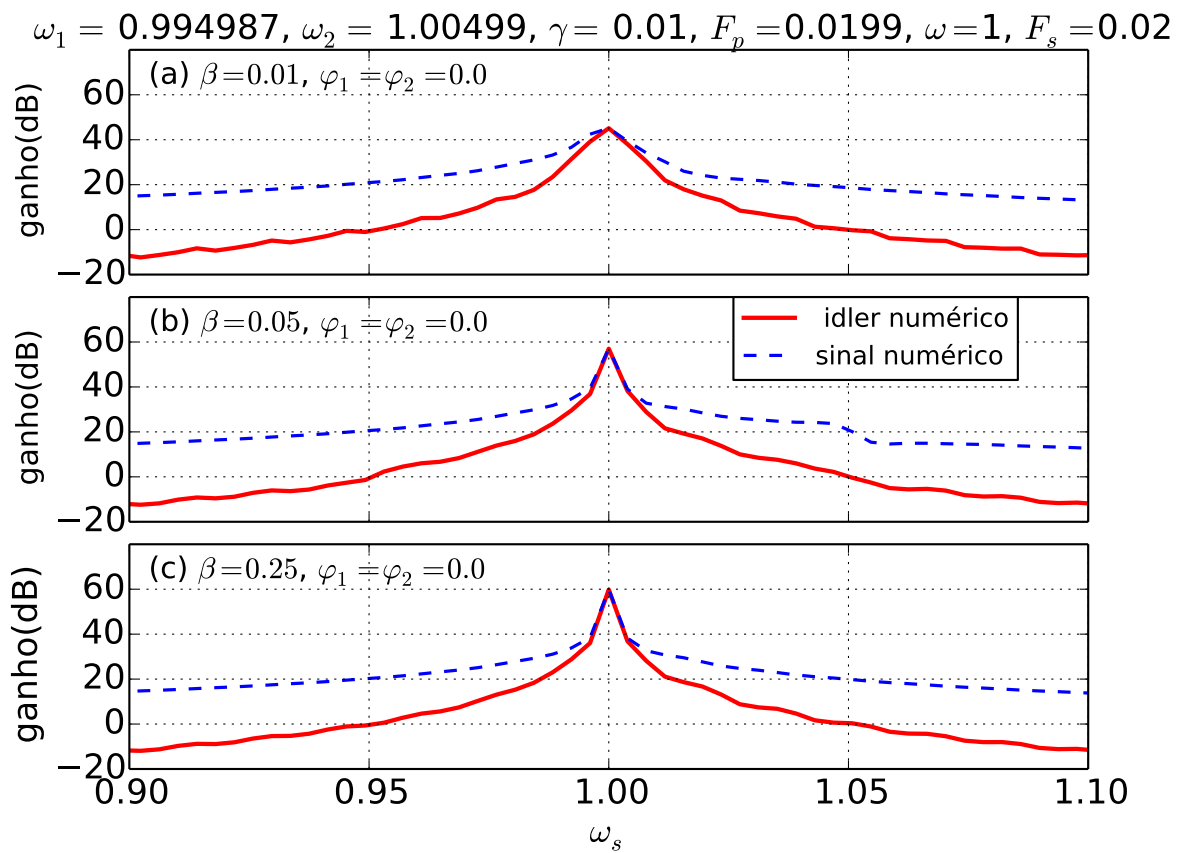


Figura 6.6: Resposta do ganho numérico para o sinal e o idler em função da frequência do sinal  $\omega_s$  dada pelas Eqs. (6.34) e (6.35).

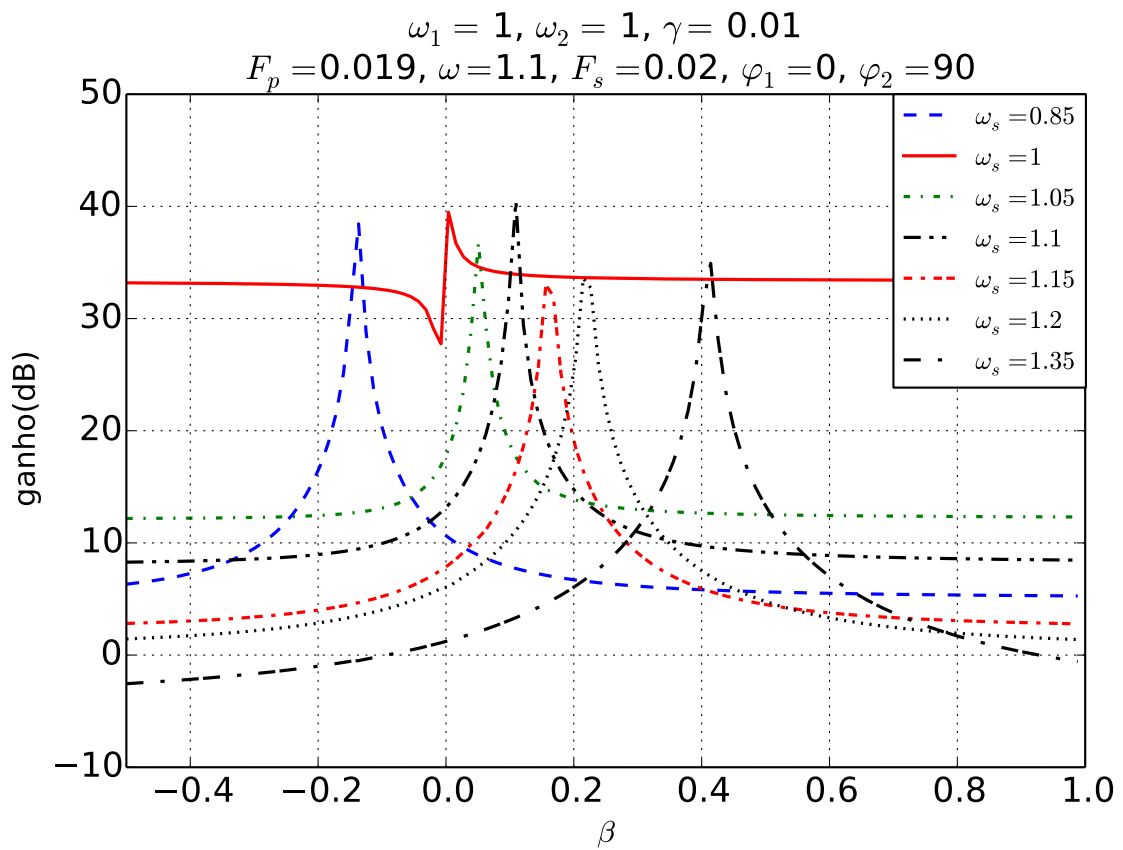


Figura 6.7: Ganho do sinal Eq. (6.22) como função do parâmetro de acoplamento  $\beta$ .

## 6.5 Conclusões

Neste capítulo vimos como utilizar o método da média para separar as equações de movimento nos modos normais e assim estudar os transientes e suas envelopes analiticamente. No entanto, isso só foi possível de ser realizado quando os dois osciladores do dímero têm o mesmo coeficiente de dissipação e a mesma amplitude de bombeamento. Com a aproximação analítica utilizando o método da média observamos que é possível descrever muito bem transientes no DPF como se pode observar pelas envelopes que obtivemos. Utilizando o método da média também obtivemos a primeira zona de instabilidade paramétrica do DAP nesse caso restrito. A linha de transição depende do parâmetro de acoplamento  $\beta$ , tendo dois limiares mínimos que ocorrem em torno das duas frequências naturais  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , indicando que o DPF pode ser utilizado na concepção de um amplificador sensível à fase e de banda estreita ajustável. Aparentemente, o caso mais geral não é integrável, de forma que os transientes em geral não podem ser obtidos analiticamente.

Vimos neste capítulo que embora o DPF seja um sistema mais complexo que o OPF, a AP baseada no DPF apresenta uma maior flexibilidade para a detecção de pequenos sinais ac. Além das propriedades de amplificação de um AP convencional, tais como alto ganho, ganho sensível à fase e largura de banda estreita, o DAP pode ser sintonizado ao se variar a constante de acoplamento  $\beta$  entre os osciladores do DAP, pois assim se modificam as frequências naturais dos modos normais. Tal procedimento, em geral, é mais simples de ser realizado experimentalmente do que o da variação das frequências naturais  $\omega_1$  e  $\omega_2$ . Assim o DAP pode ser facilmente sintonizável, pelo menos no modo de AP degenerada ou quase-degenerada, podendo apresentar ganhos altos em um intervalo relativamente grande de frequência, o que não pode ser facilmente realizado no AP convencional.

Através do método do balanço harmônico, obtivemos expressões para o ganho da amplificação de respostas estacionárias a uma excitação ac externa. Observamos que é possível analisar a resposta estacionária do DAP para uma grande variedade de combinações de parâmetros, não apenas o caso restrito que foi investigado com a teoria da média. Além disso, com esse método é possível estendermos essa teoria para um sistema composto por uma cadeia de  $N$  osciladores acoplados e parametricamente excitados e obtermos equações algébricas para a linha de transição para instabilidade e para o ganho da AP. Esperamos, que num sistema desses a largura de banda da AP degenerada e quase-degenerada seja ainda maior do que no caso do AP simples.

O modelo proposto neste capítulo pode ser utilizado para estudar o comportamento de sistemas dinâmicos tais como o de nanopartículas linearmente acopladas por laser em alto vácuo [31] ou em ressonadores de nanotubos acoplados [32].

## Conclusão

Nesta dissertação, realizamos estudos sobre ressonância paramétrica e sobre AP em osciladores parametricamente forçados, lineares e não-lineares, e também no dímero parametricamente forçado. Investigamos o comportamento desses sistemas próximo à fronteira da primeira zona de instabilidade paramétrica utilizando os métodos da média e do balanço harmônico para obtermos soluções analíticas e utilizando o algoritmo Runge-Kutta-4 para a integração numérica das equações do movimento desses sistemas dinâmicos.

No capítulo 2, fizemos uma breve revisão sobre o oscilador harmônico forçado, mostrando semelhanças e diferenças com o oscilador parametricamente forçado. Revisamos também a teoria do oscilador parametricamente forçado, obtendo a linha de transição para a instabilidade paramétrica pelos métodos perturbativos da teoria da média e do balanço harmônico. Esses resultados foram muito próximos dos resultados obtidos da integração numérica da equação de movimento do OPF. Obtivemos também a função de Green e expoentes de Floquet do OP de maneira aproximada pelo método da média. Os correspondentes resultados numéricos têm ótima concordância com os resultados teóricos [33]. Essa fronteira de instabilidade paramétrica teórica foi aplicada com êxito na obtenção da fronteira de instabilidade paramétrica experimental por Oliveira [34].

No capítulo 3, revisamos a AP linear do sinal pelos métodos da média, método do balanço harmônico e integração numérica. Mostramos que na AP degenerada o ganho é sensível à fase, ao bombeamento e à dessintonia da frequência de bombeamento em relação à frequência natural. Encontramos que o ganho da AP cresce continuamente quando se aumenta a amplitude de bombeamento até o ponto em que ele diverge na fronteira da primeira zona de instabilidade paramétrica. Abaixo do limiar de instabilidade, obtivemos séries temporais numericamente da resposta do OPF a um sinal externo ac e as envolvemos com grande precisão com as respectivas envelopes obtidas analiticamente. Em seguida, comparamos os resultados numéricos das transformadas de Fourier dessas series temporais com as previsões analíticas da teoria da média. Em geral, obtemos

dois picos apenas nessas transformadas de Fourier, um do sinal e outro do idler. Fizemos também uma comparação entre o ganho da AP do sinal, do idler e do oscilador harmônico obtidos analiticamente e a resposta obtida numericamente. Vimos que os ressonadores sem bombeamento paramétrico (OHF) apresentam um ganho máximo que é limitado pelo fator de qualidade do ressonador, enquanto ressonadores forçados e parametricamente bombeados (AP) podem apresentar um ganho bem maior na resposta ao sinal externo ac.

No capítulo 4, investigamos dois tipos de osciladores não-lineares parametricamente forçados. Ambos osciladores estudados são do tipo de Duffing, com não-linearidades cúbicas, um com apenas um termo cúbico e outro com dois termos cúbicos. A grande diferença de comportamento em relação ao OPF é que além da transição para instabilidade paramétrica, ao invés de soluções divergentes, obtemos ciclos limites periódicos. Encontramos dois tipos de bifurcações (locais de codimensão 1) para a transição para a região de instabilidade: a Hopf supercrítica, sem histerese, e a Hopf subcrítica, em que ocorre histerese e uma região com biestabilidade. Essas bifurcações foram investigadas numericamente e analiticamente pelo método da média. Pelo método da média, obtivemos as amplitudes dos ciclos limites em função da amplitude de bombeamento para diversos valores de frequência de bombeamento e os resultados foram bem próximos dos obtidos via integração numérica. Devido ao curto tempo, apenas iniciamos a análise das bifurcações da região instável. É possível que haja uma verdadeira zoologia de ciclos limites, bifurcações e regiões caóticas para amplitudes de bombeamento mais fortes do que as que investigamos, mas devido às limitações de tempo de uma dissertação de mestrado, apenas realizamos as análises numéricas e analíticas que estavam ao nosso alcance.

No capítulo 5, estudamos a AP nos osciladores não-lineares apresentados no capítulo 4. Mostramos que em ambos amplificadores pode haver também uma forte dependência do ganho com a fase entre o sinal e o bombeamento na AP degenerada, o que pode ter aplicações na recepção de sinais eletromagnéticos com modulação de fase em telecomunicações. Na AP quase degenerada, em que há uma pequena dessintonia entre a frequência do pequeno sinal ac externo a ser detectado e metade da frequência de bombeamento, obtivemos séries temporais e respectivas transformadas de Fourier através de integração numérica. Pelos métodos da média e do balanço harmônico, obtivemos as envelopes correspondentes e as transformadas de Fourier. Em todos os casos obtivemos ótimas concordâncias entre os resultados numéricos e os analíticos. No caso do ODPF 1 as transformadas de Fourier, abaixo da região de instabilidade, só apresentaram dois picos, o do sinal e o do idler. Enquanto no ODPF 2, em alguns casos investigados houve quebra de simetria de inversão temporal nas envelopes das séries temporais estacionárias, com o surgimento de vários outros picos nas transformadas de Fourier. Devido à brevidade do tempo para desenvolver essa dissertação deixamos de investigar vários tópicos relevantes tais como um estudo mais detalhado sobre essa quebra de simetria no ODPF 2, quão ampla é a extensão dinâmica desses amplificadores não lineares, e como o ganho

se comporta na região instável, em que podemos ter várias outras bifurcações não estudadas aqui. Como a AP de pequenos sinais pode apresentar um alto ganho em osciladores não-lineares, pode assim ter aplicações variadas em: eletrônica, microondas, MEMS [35], junções de Josephson, telecomunicações [36], etc.

No capítulo 6, obtivemos os modos normais de oscilação, envelopes de transientes, e a linha de transição para instabilidade de um dímero de osciladores harmônicos acoplados e parametricamente forçados pelo método da média. Esses resultados foram validados por uma excelente concordância com os resultados correspondentes obtidos de integração numérica das equações de movimento do dímero. Verificamos que a linha de transição para instabilidade pode ser bastante modificada pela constante de acoplamento entre os dois osciladores que compõem o dímero. Em seguida, investigamos o efeito da AP no dímero utilizando o método do balanço harmônico, cuja aplicação nesse contexto mostrou ser mais efetiva e geral que o método da média. Obtivemos os ganhos do sinal e do idler no dímero. Observamos que o DAP pode ser mais versátil que o AP linear comum, podendo ser um amplificador paramétrico degenerado e quase-degenerado sintonizável ao se variar o parâmetro de acoplamento entre os osciladores. No trabalho de *Eom et.al* [37] o amplificador utilizado não podia variar as propriedades do ressonador. Nesta dissertação, mostramos que o dímero paramétrico pode ser utilizado, através da variação do acoplamento entre os osciladores, como amplificador sensível à fase numa faixa de frequências mais larga do que num AP comum. Devido a isso, o DAP pode ser utilizado como receptor de sinais de telecomunicação com modulação de fase mais facilmente do que um AP comum.



# Bibliografia

- [1] ARNOL'D, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. New York: Springer, 1989.
- [2] FARADAY, M. “On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces”. *Phil. Trans. of the Royal Soc. of London*, The Royal Society, v. 121, p. 299–340, 1831.
- [3] MELDE, F. “Über die Erregung stehender Wellen eines fadenförmigen Körpers”. *Annalen der Physik und Chemie*, v. 109, n. 12, p. 193–215, 1859.
- [4] MATHIEU, E. “Le mouvement vibratoire d’une membrane de forma elliptique”. *J. de Math. Pures Appl.*, v. 13, p. 137–203, 1868.
- [5] HILL, G. W. “On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon”. *Acta mathematica*, v. 8, p. 1–36, 1886.
- [6] RAYLEIGH, L. “On the maintenance of vibrations by forces of double frequency, and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 24, n. 147, p. 145–159, 1887.
- [7] LOUISELL, W. H. *Coupled Mode and Parametric Electronics*. New York: Wiley, 1960.
- [8] MARCONI, J. *Estudo de Amplificadores Paramétricos para Sistemas de Comunicações Ópticas de Altas Taxas de Transmissão*. Tese (Doutorado) — Tese de Doutorado, Instituto de Física da Unicamp Campinas, 2006.
- [9] MUMFORD, W. “Some notes on the history of parametric transducers”. *Proc. of the IRE, IEEE*, v. 48, n. 5, p. 848–853, 1960.
- [10] JOSEPHSON, B. D. “The discovery of tunnelling supercurrents”. *Rev. of Mod. Phys.*, v. 46, n. 2, p. 251–254, 1974.

- 
- [11] OSTERMANN, F.; PUREUR, P. *Supercondutividade*. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.
- [12] YAMAMOTO, T. et al. “Flux-driven josephson parametric amplifier”. *Applied Physics Letters*, v. 93, p. 042510, 2008.
- [13] RUGAR, D.; GRÜTTER, P. “Mechanical parametric amplification and thermomechanical noise squeezing”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 67, p. 699–702, 1991.
- [14] ASPELMEYER, M.; KIPPENBERG, T. J.; MARQUARDT, F. Cavity optomechanics. *Rev. Mod. Phys.*, v. 86, p. 1391–1452, 2014.
- [15] EVANS, M. et al. Observation of parametric instability in advanced ligo. *Phys. Rev. Lett.*, v. 114, n. 16, p. 161102, 2015.
- [16] STROGATZ, S. H. *Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. 1. ed. Colorado: Wetsview Press, 2001.
- [17] VERHULST, F. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. 2. ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996.
- [18] GUCKENHEIMER, J.; HOLMES, P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Germany: Springer, 2013.
- [19] NAYFEH, A.; MOOK, D. *Nonlinear Oscillations*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2008.
- [20] BATISTA, A. A. “Cooling, heating, and thermal noise squeezing in a parametrically driven resonator”. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, v. 2011, p. P02007, 2011.
- [21] BATISTA, A. A.; MOREIRA, R. S. “Signal-to-noise ratio in parametrically driven oscillators”. *Phys. Rev. E*, v. 84, 2011.
- [22] PRESS, W. H. et al. *Numerical Recipes in C*. New York: Cambridge University Press, 1992.
- [23] MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.
- [24] BATISTA, A. A. “Squeezing of thermal noise in a parametrically-driven oscillator”. *J. of Phys.: Conference Series*, v. 285, n. 1, p. 012041, 2011.
- [25] ALMOG, R. et al. “High intermodulation gain in a micromechanical duffing resonator”. *Appl. Phys. Lett.*, v. 88, n. 21, p. 213509, 2006.

- [26] THOMPSON, J. M. T.; STEWART, H. B. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. New York: John Wiley & Sons, 2002.
- [27] BERTHET, R.; PETROSYAN, A.; ROMAN, B. “An analog experiment of the parametric instability”. *Amer. J. of Phys.*, v. 70, p. 744–749, 2002.
- [28] WIESENFELD, K.; MCNAMARA, B. “Period-doubling systems as small-signal amplifiers”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 55, p. 13, 1985.
- [29] RHOADS, J. F.; SHAW, S. W. “The impact of nonlinearity on degenerate parametric amplifiers”. *Appl. Phys. Lett.*, v. 96, n. 23, p. 234101, 2010.
- [30] ALMOG, R. et al. “Signal amplification in a nanomechanical duffing resonator via stochastic resonance”. *Appl. Phys. Lett.*, v. 90, n. 1, p. 013508, 2007.
- [31] GIESELER, J. et al. “Subkelvin parametric feedback cooling of a laser-trapped nanoparticle”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 109, p. 103603, 2012.
- [32] EICHLER, A. et al. “Parametric amplification and self-oscillation in a nanotube mechanical resonator”. *Nano Letters*, v. 11, n. 7, p. 2699–2703, 2011.
- [33] MOREIRA, R. S. *Osciladores Parametricamente Forçados na Presença de Ruído Térmico*. Dissertação (Mestrado) — UFCG, Campina Grande-PB, 2012. Não publicado.
- [34] OLIVEIRA, P. S. P. de. *Implementação Eletrônica do Amplificador Paramétrico*. Dissertação (Mestrado) — UFCG, Campina Grande-PB, 2012. Não publicado.
- [35] KARABALIN, R. et al. “Signal amplification by sensitive control of bifurcation topology”. *Phys. Rev. Lett.*, v. 106, p. 094102, 2011.
- [36] GRAY, B. R. *Design of RF and microwave parametric amplifiers and power upconverters*. Tese (Doutorado) — Georgia Institute of Technology, Atlanta, 2012.
- [37] EOM, B. H. et al. “A wideband, low-noise superconducting amplifier with high dynamic range”. *Nature Phys.*, v. 8, p. 623–627, 2012.