



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**COSMOLOGIA DE BRANA**  
**Raissa Maria Pimentel Neves**

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**COSMOLOGIA DE BRANA**

**Raissa Maria Pimentel Neves**

Dissertação realizada sob a orientação do Prof. Dr. Francisco de Assis Brito, apresentada à Unidade Acadêmica de Física em complementação aos requisitos para obtenção do título de Mestre em Física.

CAMPINA GRANDE

- 2013 -

N518c    Neves, Raissa Maria Pimentel.  
          Cosmologia de brana / Raissa Maria Pimentel Neves. – Campina Grande, 2013.  
          51 f.

          Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013.  
          "Orientação: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito".  
          Referências.

          1. Cosmologia. 2. Expansão Acelerada. 3. Campo Escalar. I. Brito, Francisco de Assis. II. Título.

CDU 524.85(043)

# COSMOLOGIA DE BRANA

RAISSA MARIA PIMENTEL NEVES

Aprovada em \_\_\_\_\_

## BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito

Orientador

---

Prof. Dr. Eduardo Marcos Rodrigues dos Passos

Examinador

---

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Morgana Lígia de Farias Freire

Examinadora

A minha mãe Maria do Carmo Pimentel Neves que em nenhum momento mediu esforços para a realização desse sonho e ao meu pai Jailton Bezerra Neves que já faleceu mais que sempre esteve ao meu lado em todos os momentos da minha vida. A eles devo a pessoa que me tornei, sou extremamente feliz e tenho muito orgulho de chamá-los de pai e mãe.

**AMO VOCÊS!**

## AGRADECIMENTOS

A Deus, fonte de vida e libertação que me envolve todos os dias no seu amor e me faz acreditar num mundo mais justo e mais humano. Sem Ele, não estaria aqui.

Aos meus pais Maria do Carmo Pimentel Neves e Jailton Bezerra Neves, que me deram toda a estrutura para que me tornasse a pessoa que sou hoje. Pela confiança, pelo apoio que transpareceu em seus atos, pelo orgulho que transpareceu em seus olhos e pelo amor que me fortalece todos os dias.

Ao professor e orientador Francisco de Assis de Brito por me ensinar a andar neste novo mundo, por todo o apoio e acima de tudo pela paciência, compreensão, competência, confiança e amizade durante esses dois anos de convivência.

A todos da minha família que de alguma forma incentivaram-me na constante busca pelo conhecimento.

Aos meus amigos do DF, com os quais pude desfrutar momentos de descontração, aprendizado e amizade. Obrigada por torcerem por mim e me

incentivarem não só na vida profissional, mas em todos os assuntos. Vocês tornaram esses dois anos de caminhada mais fácil.

A Maria Aparecida dos Santos que tive a doce e maravilhosa surpresa de conhecer, a qual levarei sempre comigo, te amo Cida. E a Mayara de Lima Freitas que está presente em todos os momentos desde os tempos da graduação.

A todos os professores do Departamento de Física que fizeram parte direta e indiretamente dessa minha trajetória.

Ao professor Marcos Antônio Anacleto e a professora Morgana Lígia de Farias Freire que foi minha orientadora na graduação, pessoa que admiro e amo muito.

E por fim, à CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou este trabalho.

## RESUMO

A cosmologia inflacionária descreve uma fase durante a qual o nosso universo passou por expansão acelerada em um curto espaço de tempo. A inflação soluciona os problemas do parâmetro de densidade nos dias atuais ser aproximadamente igual a um, assim como o problema do horizonte. Nessa fase, consideramos que nosso universo era governado por um potencial gerado por um campo escalar *ínflaton*. A cosmologia de brana inspira-se na teoria de cordas descrevendo modelos cosmológicos em dimensões extras. O objetivo deste trabalho é estudar cosmologia de brana imersa em um espaço de Minkowski em 5d para investigar regimes de aceleração do universo. Para isso consideramos a aproximação *slow roll*, analisamos o comportamento da expansão acelerada do universo através do fator de escala e do campo escalar governado por um potencial gerado pelo modelo.

**Palavras Chaves:** Expansão acelerada, campo escalar, potencial.



# ABSTRACT

Inflationary cosmology describes a phase in which our Universe expanded in an accelerated rate in a small amount of time. Inflation solves the problem of the actual value of density parameter and the horizon problem. In such phase we consider that our Universe were governed by a potential generated by a scalar field the *Inflation*. Brane cosmology is inspired by string theory describing cosmological models in extra dimensions. This work will study the brane cosmology immersed in a Minkowski in 5d to investigate the Universe acceleration. To do so we consider the slow roll approximation to the behavior of accelerating Universe with the scale factor and scalar field governed by a potential created by this model.

**Key Words:** accelerated expansion, scalar field, potential.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelo de Universo Acelerado via 3-Brana</b>	<b>5</b>
2.1	O Modelo . . . . .	6
2.2	Equação de Schrodinger para flutuações . . . . .	9
2.3	3-Brana em expansão . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Cosmologia Padrão</b>	<b>15</b>
3.1	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	16
3.2	Equações de Friedmann . . . . .	19
3.2.1	Parâmetro densidade . . . . .	25
3.2.2	Parâmetro de desaceleração . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Cosmologia Inflacionária na 3-Brana</b>	<b>28</b>
4.1	Teoria de Campo Escalar em Cosmologia . . . . .	29
4.2	Modelo de Campo Escalar na Brana . . . . .	34
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>40</b>

<b>6</b>	<b>Apêndice</b>	<b>42</b>
6.1	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker . . . . .	42
<b>7</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>48</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Em 1915, Albert Einstein introduziu um novo modelo de Universo através de suas equações, que são governadas pela Relatividade Geral que descreve a estrutura do espaço-tempo curvo. Entretanto, um ano após ter divulgado as equações da Teoria da Relatividade Geral em sua forma final, estas equações ainda não tinham soluções estáticas quando estudadas em escalas cosmológicas. Sendo assim, Einstein decidiu modificar sua teoria a fim de chegar a uma solução cosmológica estática, mas estável, para isso, ele alterou as equações de campo da Relatividade Geral e introduziu um termo chamado constante cosmológica [8].

Em 1922, o russo Alexander Friedmann ao revisar os cálculos de Einstein encontrou um erro justamente na equação que definia o Universo estático [15], então ao corrigir os cálculos constatou que a equação original de Einstein

sobre gravitação estava correta, e encontrou as soluções cosmológicas para estas equações.

Alguns anos após a correção de Friedmann, Edwin Hubble constatou por meio de observações astronômicas que o universo sofre uma expansão, confirmando a previsão da Teoria da Relatividade Geral. Hubble mostrou que as galáxias mais próximas se afastam de nós com velocidades crescentes com a distância que nos separam delas. Além disso, em 1965 Penzias e Wilson detectaram um elevado grau de isotropia da radiação cósmica de fundo[20], e prevista desde 1946 por Gamov et al, com uma temperatura de corpo negro de 2,73 K.

Estas fortes evidências observacionais nos fazem acreditar que o Universo surgiu a partir de um estado muito quente e denso chamado de *Big Bang*. Entretanto, o modelo do big bang não consegue resolver alguns problemas cosmológicos, tais como o *problema da planatura* e o *problema do horizonte* [12][23]. Deste modo, é necessário considerar uma fase na qual o universo apresenta uma expansão acelerada muito rápido em curto período de tempo. Esta fase é conhecida como inflação e foi inicialmente proposta, em 1981, por Guth [4].

Neste trabalho, o Universo é modelado por uma brana (uma parede de domínios tridimensional imersa em cinco dimensões) e sofre uma expansão acelerada devido à presença de um campo escalar [21][22] que preenche todo o espaço e que é governado por um potencial induzido na brana devido a

colisões de partículas com a mesma.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma: No capítulo 2, apresentamos um modelo de dois campos escalares reais acoplados em (1+1) dimensões do espaço-tempo. Suas soluções topológicas são conhecidas como *kinks*, que são soluções clássicas das equações de movimento. Buscamos soluções topológicas chamadas de *Branas*, que estão imersas em um espaço-tempo de Minkowski com (4+1) dimensões. Essas branas possuem uma tensão superficial associada a ela e podem ser usadas em vários contextos que vão das baixas escalas de energia na matéria condensada até as altas escalas de energia na física de partículas, campos e cosmologia. Neste capítulo mostramos que as estruturas internas geradas na brana podem afetar a aceleração do universo, por meio da colisão elástica das partículas com a 3-brana

No capítulo 3, abordamos a Cosmologia na 3-Brana através da construção da métrica de Friedmann-Robertson-Walker e das equações de Einstein, visto que a partir delas conseguimos determinar as equações de Friedmann que descrevem um Universo em expansão ou contração [15], homogêneo e isotrópico dentro do contexto da Teoria da Relatividade Geral. Através da primeira equação de Friedmann encontramos também o parâmetro densidade e o parâmetro de desaceleração.

No capítulo 4, discutimos a Cosmologia Inflacionária utilizando a teoria de campo escalar em Cosmologia, ou seja, reescrevemos as equações de Friedmann para um campo escalar  $\phi$  com o objetivo de a partir dessas equações

encontrar o campo escalar que governa a fase inflacionária do Universo. E partindo dele conseguimos determinar o fator de escala  $a(t)$ , o parâmetro de desaceleração  $q(t)$  e por fim o parâmetro densidade  $\Omega$ .

## Capítulo 2

# Modelo de Universo Acelerado via 3-Brana

Um problema físico atual, com importância e relativamente intrigante é o de como podemos modelar as observações da expansão acelerada do universo. Como consequência, muitos autores procuram ampliar seus entendimentos de alguns modelos com o objetivo de aprofundar-se em tais problemas. Uma possibilidade muito interessante é a de associar os modelos que possuem a aceleração do universo e a energia escura ao cenário conhecido como “mundo de branas”.

Considerando um cenário onde nosso universo possa ser como uma 3-Brana envolvida em um espaço-tempo de Minkowski com  $(4+1)$  dimensões, como originalmente tratado na literatura por [1][2]. Neste capítulo, iremos mostrar como as estruturas internas podem afetar a aceleração do universo,



através da colisão elástica de partículas massivas com as 3-Brana, pois elas geram uma certa quantidade de estruturas internas no seu interior que evoluem com o tempo.

## 2.1 O Modelo

Consideramos o setor escalar bosônico de uma teoria de supergravidade em 5d, e com isso encontramos via compactação a seguinte lagrangeana:

$$e^{-1}\mathcal{L}_{sugra} = -\frac{1}{4}M_*^3 R_{(5)} + G_{AB}\partial_\mu\phi^A\partial^\mu\phi_B - \frac{1}{4}G^{AB}\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi^A}\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi^B} + \frac{1}{3}\frac{1}{M_*^3}W(\phi)^2$$

ou ainda,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sqrt{g}\frac{R_{(5)}}{2\kappa_{(5)}^2} + \mathcal{L}\sqrt{g} \quad (2.1.1)$$

Para se obter a formação de paredes de domínio (3-Brana) dentro de paredes, consideramos um modelo supersimétrico de dois campos reais interagentes em (1+1) dimensões gerando uma simetria  $Z_2 \times Z_2$  [11][19][3], descrito pela seguinte lagrangeana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - V(\phi, \chi) \quad (2.1.2)$$

Como o modelo é supersimétrico, o potencial pode ser dado em termos de um superpotencial.

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial\phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial\chi}\right)^2 \quad (2.1.3)$$

A forma mais geral do superpotencial é dada por:

$$W = \lambda\left(\frac{\phi^3}{3} - a^2\phi\right) + \mu\phi\chi^2 \quad (2.1.4)$$

Substituindo (4) em (3), podemos reescrever o potencial da seguinte forma:

$$V(\phi, \chi) = \frac{1}{2}\lambda^2(\phi^2 - a^2)^2 + (2\mu^2 + \lambda\mu)\phi^2\chi^2 - \lambda a^2\mu\chi^2 + \frac{1}{2}\mu^2\chi^4 \quad (2.1.5)$$

As equações de movimento são,

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0 \quad (2.1.6)$$

$$\partial_\mu\partial^\mu\chi + \frac{\partial V}{\partial\chi} = 0 \quad (2.1.7)$$

Como o sistema é supersimétrico, podemos investigar o problema usando o formalismo de equação de primeira ordem.

$$\frac{d\phi}{dr} = W_\phi = \lambda(\phi^2 - a^2) + \mu\chi^2 \quad (2.1.8)$$

$$\frac{d\chi}{dr} = W_\chi = 2\mu\phi\chi \quad (2.1.9)$$

As soluções das equações de primeira ordem são também conhecidas como BPS [3].

### **Tipo I**

$$\phi = -a \tanh(\lambda ar) \quad (2.1.10)$$

$$\chi = 0$$

## Tipo II

$$\phi = -a \tanh(2\mu ar) \quad (2.1.11)$$

$$\chi = \pm a \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}} - 2 \operatorname{sech}(2\mu ar)$$

Onde,  $r$  é  $1/5$  da coordenada transversal da 3-Brana em 3d.

O primeiro par de soluções representa uma 3-Brana sem estrutura, diferentemente do segundo par de soluções que representa uma 3-Brana com estrutura interna. Todavia para este cenário ambas as configurações do sistema apresentam a mesma energia de Bogomol'nyi  $E_B = (4/3)\lambda a^3$ .

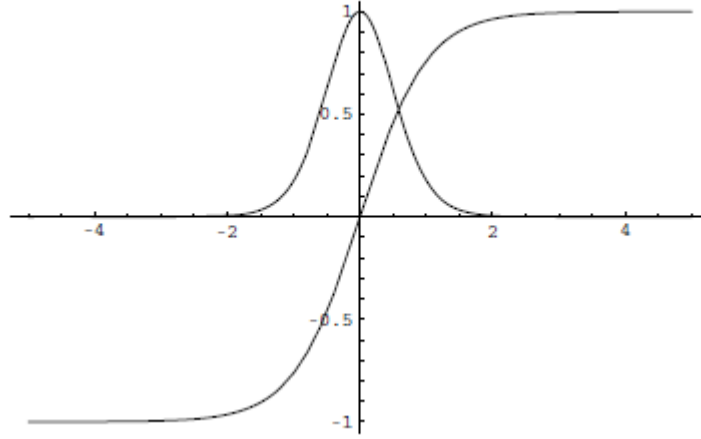


Figura 2.1: Perfil dos kinks que descrevem a 3-brana.

Quando os kinks estão imersos em duas ou mais dimensões eles são chamados 3-Brana ou paredes de domínio [6] e suas energias se transformam em densidades de energia. A figura 2.1 representa um kink, onde o centro

escolhido foi  $\phi \approx 0$ , região na qual a densidade de energia é máxima, ou seja, quando  $\phi \approx 0$  o campo  $\chi$  tende ao seu valor máximo.

## 2.2 Equação de Schrodinger para flutuações

Em algumas situações envolvendo campo escalar faz-se necessário o estudo da estabilidade linear das soluções estáticas das equações de movimento. Nesta seção buscamos analisar o comportamento dessas soluções no cenário idealizado por [2], neste contexto, as flutuações quânticas (partículas massivas) colidem com a 3-Brana em 3d.

Consideramos pequenas perturbações em torno das soluções dos campos  $\phi$  e  $\chi$ .

$$\chi = \bar{\chi} + \xi \tag{2.2.12}$$

$$\phi = \bar{\phi}$$

A nova equação de movimento que descreve estes novos campos é obtida por meio da expansão das equações de movimento originais para  $\phi$  e  $\chi$ .

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi + \bar{V}_{\chi\chi} \xi = 0 \tag{2.2.13}$$

Considerando o seguinte Ansatz para uma 3-Brana se propagando ao longo do eixo (x,y,z).

$$\xi = \xi(r) e^{-i\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z} \tag{2.2.14}$$

Onde,

$$\omega^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + m_x^2 \quad (2.2.15)$$

Substituindo (2.2.13) na equação (2.2.14), encontramos a equação de Schrödinger para as flutuações.

$$-\partial_r^2 \xi(r) + [-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2] \xi(r) + \bar{V}_{\chi\chi} \xi(r) = 0 \quad (2.2.16)$$

Vamos considerar o potencial de Schrödinger para as soluções tipo II, visto que ela representa uma 3-Brana com estrutura interna. Fazendo uso da equação (2.1.5) e das soluções tipo II (2.1.11), temos:

$$U_{II}(r) = -m_\chi^2 \left(4 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sec^2(2\mu ar) \quad (2.2.17)$$

Onde  $m_\chi$  é a massa das partículas devido às excitações elementares do campo  $\chi$ .

## 2.3 3-Brana em expansão

Analisamos como as 3-branas se expandem ao longo de suas direções quando as  $\chi$ -partículas colidem sobre ela. Para isso consideramos a probabilidade de reflexão através do coeficiente de reflexão para calcular a taxa de transferência de momento das partículas para a brana. O coeficiente de reflexão [5] para potenciais (2.2.17) possui a seguinte forma:

$$R = \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{17 - \frac{4}{N^2}}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi K_r \delta}{N^2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{17 - \frac{4}{N^2}}\right)} \quad (2.3.18)$$

Onde  $N = \sqrt{\mu/\lambda}$  é o número de estruturas que se formam no interior da brana que tem largura  $\delta = 1/\lambda a$  e  $K_r = 2\pi/\lambda'$  que é a componente da propagação de ondas associado ao volume das  $\chi$ -partículas. E  $\lambda$  é o comprimento de ondas das  $\chi$ -partículas.

O comportamento do coeficiente de reflexão pode também ser visto como uma função da quantidade de movimento da colisão das partículas com a 3-brana como mostra a figura abaixo.

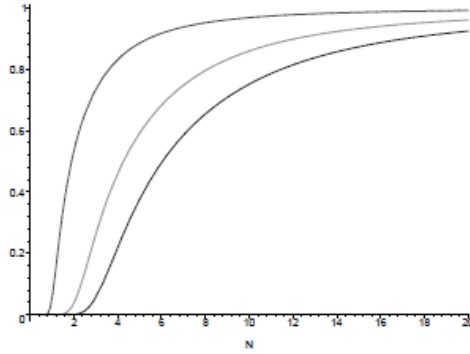


Figura 2.2: Coeficiente de reflexão em função do número de  $\chi$ -partículas que colidem na 3-brana

Desta forma as 3-Branas irão se deslocar ao longo da coordenada  $r$  transversal devido as colisões elásticas como uma função de  $R$ , onde a força transversal nas 3-branas é dada por:

$$F_r = M_{wall}\ddot{r}(t) \cong KR \quad (2.3.19)$$

Onde  $K$  depende da densidade de colisão das partículas e seus momentos.

Adotando a aproximação de  $N \gg 1$  temos,  $\cos^2(\frac{\pi}{2}\sqrt{17 - \frac{4}{N^2}}) \approx 1$  tal que podemos reescrever a coeficiente de reflexão como sendo  $\sec h^2(\xi(t))$ . Sendo

assim, a equação (2.3.19) se torna:

$$M_{wall}\ddot{r}(t) = K \sec h^2(\xi(t)) \quad (2.3.20)$$

Integrando a equação (2.3.20) encontramos  $r(t)$  que representa a posição da brana.

$$r(t) \cong (K/M_{wall})x_0 \ln[\cosh(\xi(t))] \quad (2.3.21)$$

Para encontramos o potencial  $U$  que governa a dinâmica da 3-brana, usamos a Lei de Newton, ou seja, admitimos um regime não-relativístico. Ou seja,

$$M_{wall}\ddot{r}(t) + \frac{dU}{dr} = 0 \quad (2.3.22)$$

Considerando a solução  $r(t)$  e assumindo, por simplicidade que  $N \propto t^\alpha$ ;  $\alpha > 1$ , podemos reescrever a reflectância como sendo,

$$R(t) = e^{-2r/r_0k} \quad (2.3.23)$$

Logo,

$$M_{wall}\ddot{r}(t) = e^{-2r/r_0k} \quad (2.3.24)$$

Substituindo (2.3.25) em (2.3.22), obtemos:

$$Ke^{-2r/r_0k} = \frac{dU}{dr} \quad (2.3.25)$$

Integrando a equação (2.3.26), encontramos:

$$U(r) = \frac{1}{2}r_0Ke^{\frac{2r}{r_0k}} + C \quad (2.3.26)$$

Em outras palavras, podemos dizer que a energia total é dada por:

$$E = \frac{1}{2}M_{wall}\dot{r}^2 + U \quad (2.3.27)$$

No mundo brana as partículas conhecidas estão confinadas na 3-brana embebida em um espaço de dimensão maior. Em nosso caso consideramos uma 3-brana envolvida em um espaço de 5d de Minkowski [1][2], como mostra a figura abaixo.

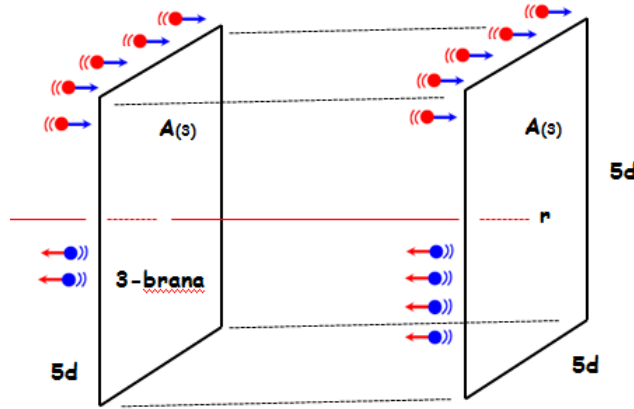


Figura 2.3: 3-brana imersa em um espaço 5d de Minkowski

Através do modelo proposto por [2] podemos recuperar aproximadamente a densidade de energia da 3-brana que também pode ser encontrada através das equações de Friedmann para teoria de campos como mostraremos no capítulo 4. Para isto, vamos considerar a energia dada pela equação (2.3.28) e a constante na 3-brana.

Para encontrarmos a densidade de energia da 3-brana, dividimos a equação



(2.3.28) por  $A_3$  que é a área da 3-brana, ou seja,

$$\frac{E}{A_{(3)}} = \frac{1}{2} \frac{M_{wall}}{A_{(3)}} \dot{r}^2 + \frac{U}{A_{(3)}} \quad (2.3.28)$$

Sabendo que a densidade de energia na 3-brana depende da quantidade de energia armazenada por unidade de volume, ou seja,

$$\rho_{wall} = \frac{E}{A_{(3)}} \quad (2.3.29)$$

Observando a figura 2.2 percebemos ainda que a tensão na brana  $T_{wall}$  é diretamente proporcional a quantidade de partículas que colidem em um certo volume. Logo,

$$T_{wall} = \frac{M}{A_{(3)}} \quad (2.3.30)$$

Temos ainda que:

$$V(r) = \frac{U}{A_{(3)}} \quad (2.3.31)$$

Portanto, substituindo as equações (2.3.29), (2.3.30) e (2.3.31) na equação (2.3.28), obtemos:

$$\rho_{wall} = \frac{1}{2} T_{wall} \dot{r}^2 + V(r) \quad (2.3.32)$$

Admitindo que  $\sqrt{T_{wall}} r(t) \longleftrightarrow \phi(t)$ , temos:

$$\rho_{wall} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.3.33)$$

Onde  $T_{wall}$  é a tensão da 3-brana e  $\phi = \phi(t)$  é denominado *ínflaton*.

# Capítulo 3

## Cosmologia Padrão

A Cosmologia estuda a dinâmica da estrutura do Universo em larga escala [13][12]. Logo dentre as forças fundamentais que existem na natureza, observamos que em larga escala a força gravitacional é responsável pela interação predominante no Universo. Portanto a Relatividade Geral é utilizada como a teoria fundamental para o estudo da Cosmologia. Em larga escala, o Universo apresenta-se homogêneo e isotrópico [17], isto porque, para valores de escala na ordem maior do que 100 Mpc <sup>1</sup>, as observações indicam que a distribuição de matéria no Universo é homogênea e isotrópica.

Neste capítulo abordamos as bases da cosmologia padrão, que surgiu com o advento da Teoria da Relatividade Geral de Einstein. O pressuposto básico de toda cosmologia padrão é o princípio cosmológico, que em larga escala

---

<sup>1</sup>Distância que uma estrela deve estar para que a paralaxe anual seja igual a 1 arco. Um parsec equivale a 3,26 anos-luz, ou cerca de 30,9 trilhões de quilômetros

considera o Universo como sendo Homogêneo e isotrópico. Sendo assim, este princípio desempenha um papel fundamental no modelo de Friedmann-Robertson-Walker, tendo em vista que sua métrica descreve a homogeneidade e isotropia do espaço.

### 3.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

O princípio cosmológico admite que o Universo é homogêneo e isotrópico em largas escalas. Este princípio foi enunciado em 1933 pelo astrofísico britânico Edward Arthur Milne segundo o qual diferentes observadores, que estejam participando da expansão cosmológica, devem ter a mesma interpretação sobre as propriedades do Universo. Sua confirmação, depois da acidental descoberta da radiação cósmica de fundo, por Arno Penzias e Robert Wilson, em 1965, fez desse princípio o ponto chave na elaboração do modelo cosmológico padrão [12].

Como o Universo se apresenta homogêneo e isotrópico na distribuição de matéria, é de se esperar que o espaço-tempo também seja homogêneo e isotrópico. Logo, a homogeneidade indica que a métrica é invariante por translações e a isotropia justifica que em torno de qualquer ponto do espaço, a métrica é invariante por rotações.

Num espaço tridimensional homogêneo e isotrópico existem seis vetores de Killing, ou seja, três de translação e três de rotação que geram espaços com simetria máxima. Neste espaço o tensor de Riemann pode ser escrito

na seguinte forma:

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (3.1.1)$$

Logo,

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (3.1.2)$$

Portanto, sabemos que existe um sistema de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  adaptadas a simetria esférica em qualquer elemento de linha do espaço 3d se escreve a métrica da seguinte maneira:

$$dl^2 = e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1.3)$$

Sendo  $\lambda(r)$  uma função desconhecida, que pode ser determinada usando-se o tensor de Riemann.

Para isto, vamos contrair os dois primeiros índices da equação (3.1.1).

$${}^{(3)}R_{jil}^i = K(\delta_i^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{ji}) \quad (3.1.4)$$

$${}^{(3)}R_{jl} = K(3\gamma_{jl} - \gamma_{jl}) \quad (3.1.5)$$

$${}^{(3)}R_{jl} = 2K\gamma_{jl} \quad (3.1.6)$$

Portanto, através do cálculo do tensor de Ricci para a métrica (3.1.3), obtemos os seguintes valores:

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r} \quad (3.1.7)$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2}\lambda' r e^{-\lambda} - e^{-\lambda} \quad (3.1.8)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (3.1.9)$$

Substituindo (3.1.7), (3.1.8) e (3.1.9) na equação (3.1.6), encontramos duas equações independentes.

$$e^{-\lambda} = -kr^2 + A \quad (3.1.10)$$

$$e^{\lambda} = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (3.1.11)$$

Assim a métrica de um espaço 3d homogêneo e isotrópico tem a seguinte forma:

$$dl^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (3.1.12)$$

A equação acima representa a distância espacial própria entre eventos simultâneos, onde  $k$  é a constante de curvatura do espaço.

Para observadores co-móveis distribuídos nesse espaço 3d, com velocidade média de material local nula, a linha de Universo desses observadores deve ser ortogonal ao espaço 3d, homogênea e isotrópica, o que induz que a parte espacial do tensor métrico evolua por meio de uma função universal do tempo,

de modo que considerando o Princípio Cosmológico, a métrica de Friedmann-Robertson-Walker que descreve um Universo homogêneo e isotrópico em expansão é:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.1.13)$$

Na métrica de FRW  $a(t)$  representa o fator de escala que está relacionado com a taxa de expansão do Universo, ou seja, é utilizado para descrever a evolução de distâncias espaciais e  $k$  como já foi dito anteriormente é a constante de curvatura do espaço que pode assumir valores  $-1, 0, 1$  de acordo com a curvatura do espaço a que está submetida.

## 3.2 Equações de Friedmann

As equações de Friedmann formam um conjunto de equações em cosmologia física que governam a expansão métrica do espaço em modelos homogêneos e isotrópicos do Universo dentro do contexto da Teoria da Relatividade Geral [14]. Assim, um modelo cosmológico correspondente a soluções das equações de campo de Einstein para um fluido perfeito e que reproduzem as principais características do Universo.

Desta maneira, a cosmologia relativística tem sua própria base formada em três hipóteses:

**I** - O princípio cosmológico, dado pelo elemento de linha de Robertson-

Walker.

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (3.2.14)$$

**II** - O postulado de Weyl, que introduz o fluído perfeito, cujo tensor energia-momento é dado por:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (3.2.15)$$

**III** - A equação de Einstein com constante cosmológica.

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (3.2.16)$$

Onde  $G_{\mu\nu}$  representa o tensor de Einstein dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (3.2.17)$$

Com o objetivo de encontrar as componentes do tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , faz-se necessário determinar inicialmente as componentes do tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , o escalar de curvatura  $R$  e por fim determinar as componentes do *tensor energia-momentum*.

Pelo princípio cosmológico a métrica é diagonal por construção e suas componentes não nulas do *tensor energia-momentum* são dadas por:

$$T_{00} = (\rho + p)U_0 U_0 - pg_{00} \quad (3.2.18)$$

$$T_{0i} = (\rho + p)g_{0i}U^i U_0 - pg_{00} \quad (3.2.19)$$

$$T_{00} = (\rho + p)g_{00}U^0U_0 - pg_{00} \quad (3.2.20)$$

$$T_{00} = \rho + p - p \quad (3.2.21)$$

$$T_{00} = \rho \quad (3.2.22)$$

e

$$T_{ii} = (\rho + p)U_iU_i - pg_{ii} \quad (3.2.23)$$

$$T_{ii} = (\rho + p)g_{ik}U^kU_i - pg_{ii} \quad (3.2.24)$$

$$T_{ii} = -pg_{ii} \quad (3.2.25)$$

Sabendo que  $U_iU_i = 0$ , temos que  $T_{11} = -pg_{11}$ ,  $T_{22} = -pg_{22}$  e  $T_{33} = -pg_{33}$ . Logo, de acordo com a métrica (3.2.14), obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Sendo assim,

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p\frac{-a^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Para obtermos o tensor de Einstein, calculamos o tensor de Ricci que é obtido a partir da contração do tensor de Riemann, dado por:



$$R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\eta\gamma}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - \Gamma_{\eta\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \quad (3.2.26)$$

E os coeficientes da conexão são:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} \right) \quad (3.2.27)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (3.2.28)$$

Substituindo (3.2.27) em (3.2.26) obtemos tensor Riemann, e por sua vez fazendo a contração desde tensor temos que os tensores de Ricci são:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.2.29)$$

$$R_{11} = \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2} \quad (3.2.30)$$

$$R_{22} = r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (3.2.31)$$

$$R_{33} = r^2 \sin^2 \theta (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \quad (3.2.32)$$

Como o escalar de curvatura é obtido através da contração do tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \quad (3.2.33)$$

Substituindo as equações (3.2.29), (3.2.30), (3.2.31) e (3.2.32) na equação (3.2.33), encontramos o valor do escalar de curvatura.

$$R = -6 \left[ \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right] \quad (3.2.34)$$

Com as informações obtidas é possível calcular o tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$ , cujas componentes não nulas são  $G_{00}$  e  $G_{11}$ . Assim,

$$G_{00} = 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) \quad (3.2.35)$$

$$G_{11} = \left[ \frac{-1}{1 - kr^2} \right] (2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k) \quad (3.2.36)$$

Da equação (3.2.16) que representa as equações de Einstein a componente  $G_{00}$  será dada por:

$$G_{00} = 8\pi T_{00} \quad (3.2.37)$$

Lembrando que a primeira componente  $T_{00}$  do *tensor energia-momentum* representa a densidade de energia do fluido iremos ter o seguinte,

$$G_{00} = 8\pi\rho \quad (3.2.38)$$

Igualando as equações (3.2.38) e (3.2.35) vamos obter a primeira equação de Friedmann.

$$3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) = 8\pi\rho \quad (3.2.39)$$

$$H^2 = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi\rho}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (3.2.40)$$

Já para a segunda equação de Friedmann, usamos a componente  $G_{11}$  das equações de Einstein.

$$G_{11} = 8\pi T_{11} \quad (3.2.41)$$

Sabemos que a componente  $T_{11}$  do *tensor energia-momentum* é representada por  $T_{11} = pg_{11}$ . Portanto substituindo  $T_{11}$  e a equação (3.2.36) na equação (3.2.41), encontramos:

$$\left[ \frac{-1}{1 - kr^2} \right] (2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k) = 8\pi \left[ \frac{pa^2}{1 - kr^2} \right] \quad (3.2.42)$$

$$2\ddot{a}a + \dot{a}^2 + k = 8\pi pa^2 \quad (3.2.43)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = -8\pi p \quad (3.2.44)$$

Substituindo a equação (3.2.39) na equação (3.2.44), teremos:

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{8\pi\rho}{3} = -8\pi p \quad (3.2.45)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi p - \frac{8\pi\rho}{3} \quad (3.2.46)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-12\pi p}{3} - \frac{4\pi\rho}{3} \quad (3.2.47)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi}{3}(3p + \rho) \quad (3.2.48)$$

A equação (3.2.48) representa a segunda equação de Friedmann e indica a taxa de aceleração com que o Universo se expande em função da densidade de matéria e da pressão do fluido cósmico [21][22][23] relacionadas com o fator de escala de expansão do Universo. Para  $\ddot{a} > 0$  podemos verificar que o Universo sofre uma expansão acelerada.

### 3.2.1 Parâmetro densidade

Usando a primeira equação de Friedmann, temos que:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k^2}{a^2} \quad (3.2.49)$$

Onde a densidade é dada em termos da densidade de radiação, matéria e da constante cosmológica respectivamente  $\rho = \rho_R + \rho_M + \rho_\Lambda$  que são três fontes responsáveis pela evolução do Universo.

$$\rho_R = \frac{\rho_0}{a^4} \quad (3.2.50)$$

$$\rho_M = \frac{\rho_0}{a^3} \quad (3.2.51)$$

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (3.2.52)$$

Para um dado valor do parâmetro de Hubble  $H$ , existe um valor especial de densidade que seria necessária a fim de fazer a geometria do universo plana,  $k = 0$ . Isto é conhecido como o valor de densidade crítica  $\rho_c$  [16][17], dado por:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.2.53)$$

A densidade crítica não é necessariamente a verdadeira densidade do universo, uma vez que o universo não precisa ser plano. No entanto, ele define uma escala natural do universo, e a partir do seu valor inferimos se o universo é fechado, aberto ou plano.

Ao invés de obter diretamente a densidade do Universo, é muitas vezes útil citar seu valor em termos da densidade crítica. Esta quantidade adimensional é conhecida como parâmetro densidade,

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (3.2.54)$$

Podemos ainda escrever o parâmetro densidade da seguinte forma:

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_R + \Omega_\Lambda \quad (3.2.55)$$

$$\Omega = \frac{\rho_M}{\rho_c} + \frac{\rho_R}{\rho_c} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_c} \quad (3.2.56)$$

Substituindo as equações (3.2.53) e (3.2.54) na equação (3.2.49), encontramos:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c \Omega - \frac{k^2}{a^2} \quad (3.2.57)$$

$$H^2 = H^2 \Omega - \frac{k^2}{a^2} \quad (3.2.58)$$

$$H^2(\Omega - 1) = \frac{k^2}{a^2} \quad (3.2.59)$$

$$\Omega - 1 = \frac{k^2}{a^2 H^2} \quad (3.2.60)$$

Lembrando que  $H^2 = \dot{a}^2/a^2$

$$\Omega - 1 = \frac{k^2}{a^2 \dot{a}^2/a^2} \quad (3.2.61)$$

$$\Omega = 1 + \frac{k^2}{\dot{a}^2} \quad (3.2.62)$$

Desta maneira temos que para um universo plano  $\rho = \rho_c$ , logo  $\Omega = 1$  e  $k = 0$ . Quando temos um universo fechado (geometria esférica)  $k > 0$ ,  $\rho > \rho_c$  e  $\Omega > 1$ . Já para um universo aberto (geometria hiperbólica)  $k < 0$ , logo a equação (3.2.62) nos diz que  $\rho < \rho_c$  e  $\Omega < 1$  [16][17].

### 3.2.2 Parâmetro de desaceleração

Um parâmetro importante que nos auxilia no entendimento do processo de expansão do universo é o parâmetro de desaceleração  $q(t)$  [18], ou seja, uma maneira alternativa de descrever o seu estado de expansão do universo consiste em utilizá-lo.

$$q(t) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{H} \right) - 1 \quad (3.2.63)$$

$$q(t) = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \quad (3.2.64)$$

O parâmetro de desaceleração  $q(t)$  é um indicador da taxa de expansão do Universo, ou seja, o valor de  $q(t)$ , assim como o de  $\Omega$  determinam o futuro da expansão [12]. Dessa forma, se  $q < 0$ , a expansão do Universo é acelerada, porém se  $q > 0$  indica uma fase desacelerada.

## Capítulo 4

# Cosmologia Inflacionária na 3-Brana

O Big Bang é a mais aceita e bem sucedida teoria dentre as outras acerca da origem do Universo. Esse modelo descreve a evolução do Universo desde os primeiros centésimos de segundos até os dias de hoje, além disso, acredita-se que o Universo originou-se há aproximadamente 13,7 bilhões de anos, a partir de uma singularidade. Porém, o Big Bang não consegue explicar diversos problemas tais como, o parâmetro densidade  $\Omega \approx 1$  e o problema do horizonte.

Para tentar resolver esses problema foi necessário o surgimento de uma fase inflacionária que pode ser estudada de diversas forma, dentre elas existe algumas mais atuais que utilizam a Cosmologia e a Teoria de Campo para explicar tal fase. Neste capítulo utilizamos a teoria de campos para explicar a fase inflacionária do Universo, que consegue solucionar vários os problemas.

Nessa fase, consideramos que nosso universo era governado por um potencial gerado por um campo escalar *ínflaton*.

## 4.1 Teoria de Campo Escalar em Cosmologia

Em 1981 A. Guth propôs em seu modelo que a inflação não teria fim, e isto faria com que o Universo continuasse em um eterno processo de expansão acelerada [4]. Todavia em 1982, A. Linde criou um novo cenário conhecido como nova inflação ou inflação caótica [12], que prevê que o Universo deve ser essencialmente plano, uma vez que a densidade da matéria em um Universo plano está diretamente relacionada com a sua taxa de expansão.

A principal ideia de todos os modelos inflacionários com campo escalar é considerar que a energia do Universo primitivo tenha sido dominada pela energia potencial dos campos escalares. Entretanto para incluir estes campos nas equações de Friedmann, com o objetivo de gerar modelos cosmológicos que consigam explicar a fase inflacionária do Universo devemos utilizar o *tensor energia-momentum* para o campo escalar definido por:

$$T_{\nu}^{\mu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \partial_{\mu} \phi} \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} \quad (4.1.1)$$

Para um campo escalar real,

$$T_{\mu\nu} = \partial_{\mu} \phi \partial_{\nu} \phi - \delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} \quad (4.1.2)$$

Onde a lagrangeana será:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - V(\phi) \quad (4.1.3)$$



Substituindo a equação (4.1.3) na equação (4.1.2) podemos encontrar a componente  $T_{00}$  do *tensor energia-momentum*.

$$T_{00} = \partial_0\phi\partial_0\phi - \frac{1}{2}g_{00}\partial_0\phi\partial^0\phi - g_{00}V(\phi) \quad (4.1.4)$$

$$T_{00} = \partial_0\phi\partial_0\phi + \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + V(\phi) \quad (4.1.5)$$

$$T_{00} = (\partial_0\phi)^2 + \frac{1}{2}\partial_0\phi g_{00}\partial_0\phi + V(\phi) \quad (4.1.6)$$

$$T_{00} = \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.1.7)$$

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.1.8)$$

Vimos no capítulo anterior que a componente  $T_{00} = \rho$ , logo comparando com a equação (4.1.8) obtemos:

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (4.1.9)$$

Efetuando os mesmos procedimentos só que agora para a componente  $T_{11}$ , temos:

$$T_{11} = \partial_1\phi\partial_1\phi + g_{11}\mathcal{L} \quad (4.1.10)$$

$$T_{11} = -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) \quad (4.1.11)$$

$$T_{11} = \frac{1}{2}(\rho_0\phi)^2 - V(\phi) \quad (4.1.12)$$

Lembrando que a componente  $T_{11} = p$ , encontramos:

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \quad (4.1.13)$$

Como sabemos a dinâmica do Universo na presença de um campo escalar  $\phi$  pode ser obtido a partir das equações de Friedmann. Portanto, voltando a nossa atenção para as equações de Friedmann (3.2.40) e (3.2.48) nas quais iremos substituir as equações (4.1.9) e (4.1.13) que correspondem respectivamente a densidade de energia e a pressão, para conseguirmos obter as expressões em função do campo escalar.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] - \frac{k}{a^2} \quad (4.1.14)$$

E para a segunda equação de Friedmann, temos:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-4\pi G}{3} \left\{ 3 \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] + \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \right\} \quad (4.1.15)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{-8\pi G}{3} [\dot{\phi}^2 - V(\phi)] \quad (4.1.16)$$

Consideramos a equação da conservação da energia para a métrica de Friedmann-Robertson-Walker para um fluido perfeito que pode ser obtida através do *tensor energia-momentum*:

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \quad (4.1.17)$$

Substituindo as equações (4.1.9) e (4.1.13) na equação (4.1.17), obtemos a seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + 3\frac{\dot{a}}{a} \left\{ \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] + \left[ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \right] \right\} \quad (4.1.18)$$

$$\dot{\phi}\ddot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi}\dot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi}^2 = 0 \quad (4.1.19)$$

Dividindo (4.1.19) por  $\dot{\phi}$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.1.20)$$

Definindo o parâmetro de Hubble  $H = \dot{a}/a$  que representa a taxa relativa de crescimento do Universo, e considerando que o campo escalar  $\phi$  é inicialmente homogêneo[13][23], todas as suas derivadas serão praticamente nulas. Logo a equação (4.1.20) que representa a equação de movimento resulta.

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.1.21)$$

Onde a equação (4.1.21) é quem governa a dinâmica do *inflaton*.

Dentre os vários modelos de inflação, destaca-se o tipo rolagem lenta, no qual o potencial deve ser muito maior que a energia cinética, de modo que ele seja aproximadamente constante.

$$V(\phi) \gg \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (4.1.22)$$

Desta forma as equações (4.1.9) e (4.1.13) podem ser reescritas respectivamente como:

$$\rho \approx V(\phi_0) \quad (4.1.23)$$

$$p \approx -V(\phi_0) \quad (4.1.24)$$

Essas condições juntas são conhecidas como aproximação *slow-roll*,  $\dot{\phi} \approx \text{constante}$  e  $\ddot{\phi} \approx 0$  [10][12][21][22] e garantem que se o potencial for plano o bastante o campo  $\phi$  rolará lentamente. Levando em consideração todas essas informações, o campo  $\phi$  irá produzir inflação e por isso é chamado de *inflaton*[23].

Como a segunda derivada temporal  $\ddot{\phi}$  é pequena, poderá ser ignorada, ou seja,  $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ , sendo assim a equação de movimento para  $\phi$  se torna  $3H\dot{\phi} = -V'(\phi)$ . Nesta caso a equação de Friedmann (4.1.14) poder ser reescrita para  $k = 0$  (Universo plano), como

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (4.1.25)$$

Já a equação de movimento (4.1.21) fica

$$3H\dot{\phi} \approx -\frac{\partial V}{\partial \phi} \quad (4.1.26)$$

Através da equação de Friedmann (4.1.25) podemos determinar o fator de escala  $a(t)$  que nos fornece as informações importantes sobre a expansão do Universo para um potencial aproximadamente constante.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G V_0}{3} \quad (4.1.27)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} \quad (4.1.28)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} \quad (4.1.29)$$

$$\int \frac{1}{a} da = \int \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} dt \quad (4.1.30)$$

Integrando (4.1.30) teremos:

$$\ln a = \sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} t \quad (4.1.31)$$

$$a(t) = e^{\sqrt{\frac{8\pi G V_0}{3}} t} \quad (4.1.32)$$

## 4.2 Modelo de Campo Escalar na Brana

Neste trabalho encontramos no capítulo 1 a densidade de energia potencial dada em termos do campo escalar real  $\phi$ , que possui a seguinte forma,

$$V(r) = \frac{1}{2} \phi_0 k e^{-2\phi/\phi_0 k} \quad (4.2.33)$$

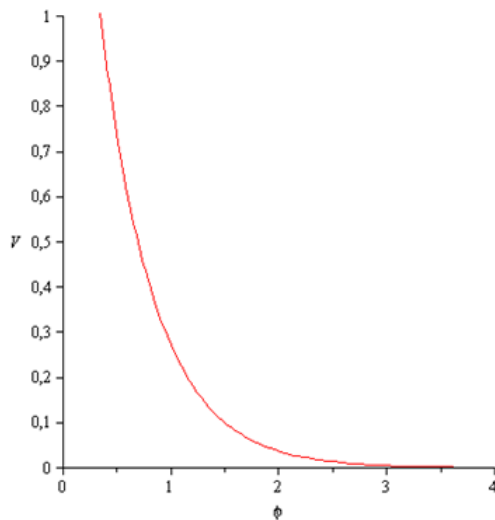


Figura 4.1: Densidade de energia potencial em função do tempo

Substituindo a equação (4.2.33) na equação de Friedmann para um Universo homogêneo contendo o campo escalar, vamos obter

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (4.2.34)$$

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \sqrt{\frac{1}{2} \phi_0 k e^{-2\phi/\phi_0 k}} \quad (4.2.35)$$

Substituindo a equação (4.2.35) na equação que governa a evolução do campo escalar, temos:

$$3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (4.2.36)$$

$$3\sqrt{\frac{8\pi G}{3}} \sqrt{\frac{1}{2} \phi_0 k e^{-2\phi/\phi_0 k}} \dot{\phi} - e^{-2\phi/\phi_0 k} = 0 \quad (4.2.37)$$

$$\dot{\phi} = e^{-2\phi/\phi_0 k} [24\pi G]^{1/2} \left[ \frac{1}{2} \phi_0 k e^{-2\phi/\phi_0 k} \right]^{1/2} \quad (4.2.38)$$

$$e^{-2\phi/\phi_0 k} [24\pi G]^{1/2} \left[ \frac{1}{2} \phi_0 k e^{-2\phi/\phi_0 k} \right]^{1/2} d\phi = dt \quad (4.2.39)$$

$$e^{2\phi/\phi_0 k} = [12\pi G \phi_0^3 k^3]^{-1} t^2 \quad (4.2.40)$$

$$\frac{2\phi}{\phi_0 k} = \ln \left( \frac{t^2}{12\pi G \phi_0^3 k^3} \right) \quad (4.2.41)$$

$$\phi(t) = \frac{\phi_0 k}{2} \ln \left( \frac{t^2}{12\pi G r_0^3 k^3} \right) \quad (4.2.42)$$

Definimos  $\beta^{-1} = 12\pi G\phi_0^3 k^3$

Portanto o campo escalar  $\phi$  que gera o potencial, e que por sua vez governa a fase inflacionária será

$$\phi(t) = \frac{\phi_0 k}{2} \ln(\beta t^2) \quad (4.2.43)$$

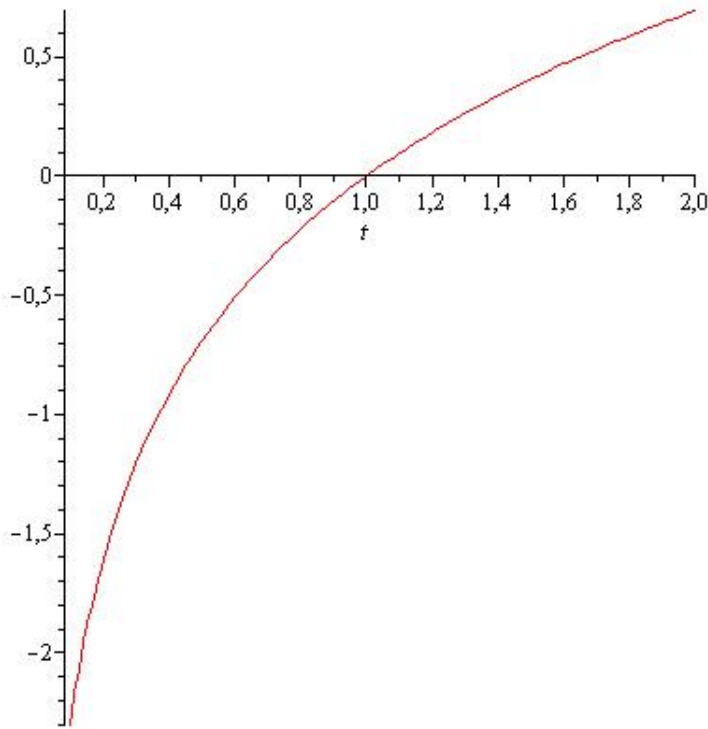


Figura 4.2: Evolução do campo escalar  $\phi$  em função do tempo  $t$ .

Através da equação de Friedmann podemos ainda determinar o fator de escala, para isto, vamos substituir a equação (4.2.43) na equação (4.2.35) para determinar o valor de  $a(t)$  associado a este campo  $\phi$

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}} \sqrt{\phi_0 k e^{\frac{-2}{\phi_0 k} (\frac{\phi_0 k}{2} \ln \beta t^2)}} \quad (4.2.44)$$

$$\int_{a_0}^a \frac{1}{a} da = \int \sqrt{\frac{4\pi G}{3} \phi_0 k \beta^{-1}} \sqrt{\frac{1}{t^2}} dt \quad (4.2.45)$$

$$\ln \frac{a}{a_0} = 4\pi G \phi_0 k^2 \ln t \quad (4.2.46)$$

Fazendo,  $b = 4\pi G k^2$

$$\ln \frac{a}{a_0} = b \phi_0 k^2 \ln t \quad (4.2.47)$$

$$a(t) = a_0 t^{b\phi_0^2} \quad (4.2.48)$$

Construindo o gráfico, obtemos o seguinte comportamento do fator de escala do Universo em função do tempo.

Após determinamos o fator de escala variando no tempo como mostra a equação (4.2.48), podemos aplicar este resultado e encontrar o parâmetro de desaceleração  $q(t)$ . Logo realizando as respectivas derivadas do fator de escala e substituindo na equação (3.2.64) encontramos o parâmetro de desaceleração dado por:

$$q(t) = \frac{a_0 t^{b\phi_0^2} [a_0 b \phi_0^2 (b \phi_0^2 - 1) t^{b\phi_0^2 - 2}]}{(a_0 b \phi_0^2 t^{b\phi_0^2 - 1})^2} \quad (4.2.49)$$

$$q(t) = \frac{(b^2 \phi_0^4 - b^2 \phi_0^2)}{b^2 \phi_0^2} \quad (4.2.50)$$

Construindo o gráfico, obtemos o seguinte comportamento do parâmetro de desaceleração em função do tempo.



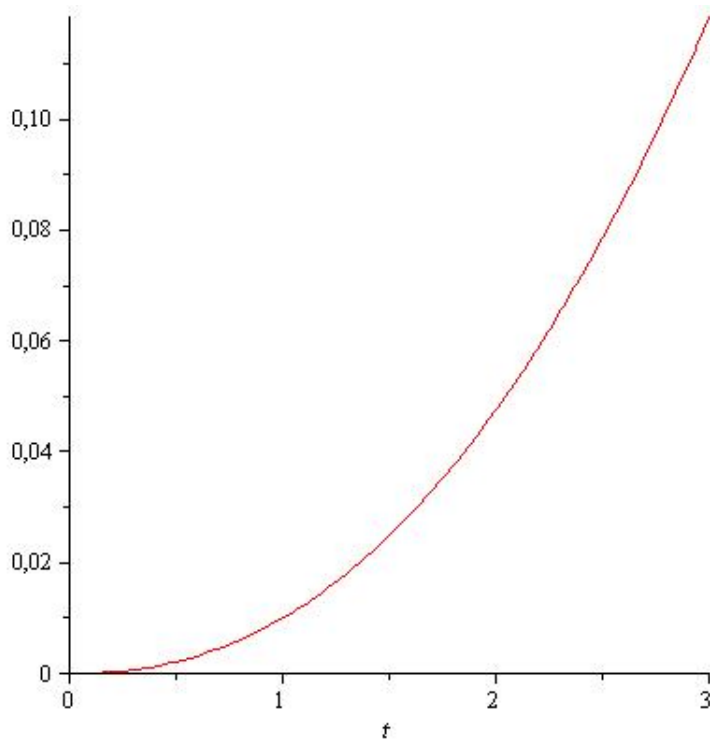


Figura 4.3: Evolução do fator de escala  $a(t)$  em função do tempo  $t$ .

Utilizando o fator de escala  $a(t)$  podemos obter também o parâmetro densidade através da equação (3.2.62).

$$\Omega = 1 + \frac{k^2}{a_0^2 b^2 \phi_0^4 t^{2b\phi_0^2 - 2}} \quad (4.2.51)$$

Como  $a_0$ ,  $b$  e  $\phi_0$  são constantes podemos concluir que o parâmetro densidade depende apenas do tempo.

$$\Omega \propto 1 + k^2 c t^{-2(a-1)} \quad (4.2.52)$$

Onde,  $a = b\phi_0^2$  e  $c = 1/a_0^2 b^2 \phi_0^4$ . Lembrando que neste trabalho estamos considerando um modelo de Universo plano, temos que  $k = 1$ . Logo,

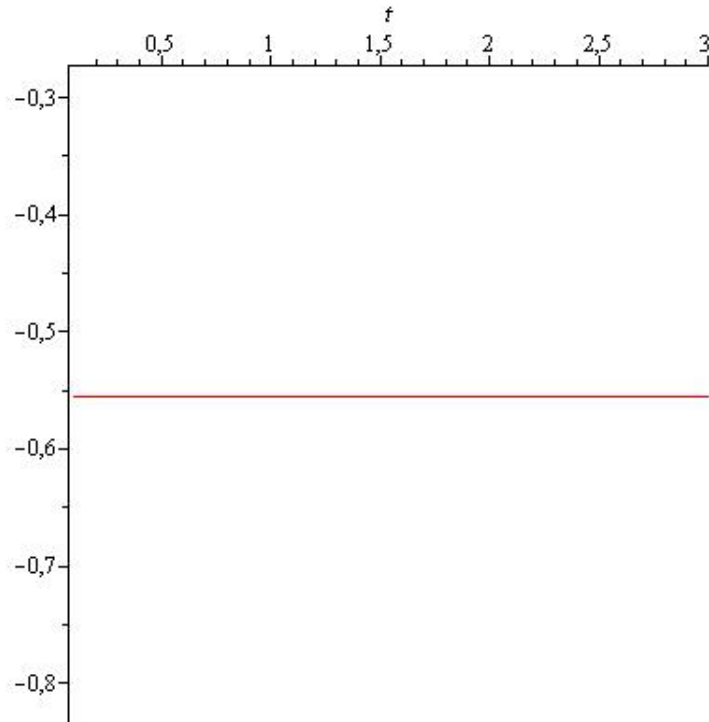


Figura 4.4: Parâmetro de desaceleração em função do tempo  $t$ .

podemos reescrever (4.2.52) da seguinte forma,

$$\Omega \propto 1 + ct^{-2(a-1)} \quad (4.2.53)$$

Fazendo  $a_0^2 b^2 \phi_0^4 > 0$  implica em dizer que  $c \approx 0$   $ct^{-2(a-1)} \approx 0$ , logo  $\Omega \approx 1$ . Podemos concluir então que temos um modelo de Universo plano, o que resolve o problema de planatura do universo.

# Capítulo 5

## Conclusão

Nas últimas décadas as aplicações em cenários de mundo-brana tem recebido considerável atenção, e alguns trabalhos [1][2] tem utilizado modelos com a interação de dois campos escalares reais, que são usados para descrever a separação das branas, que podem ser naturalmente incorporadas tem teorias supersimétricas.

Neste trabalho, encontramos nosso próprio potencial a partir da tensão na brana [2]. E através das equações de Friedmann para a teoria de campo escalar, consideramos a aproximação *slow roll* e verificamos que o comportamento do campo escalar  $\phi$  e do fator de escala  $a(t)$  satisfazem o modelo de Einstein-de Sitter ou modelo padrão, visto que escolhemos o parâmetro de curvatura  $k$  como sendo igual a zero. Desta forma, as equações de Friedmann nos forneceram resultados para a época atual com curvatura nula, ou seja, um modelo de Universo plano como ficou comprovado através da obtenção

do nosso parâmetro densidade.

# Capítulo 6

## Apêndice

### 6.1 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

A geometria desenvolvida por Bernhard Riemann em 1854 [] sugeria que o Universo deveria possuir uma geometria curva. Desta maneira, poderíamos viajar ao longo de uma geodésica de uma hiperfície tridimensional do espaço quadri-dimensional. Onde nesse espaço o tensor de Riemann era definido por,

$${}^{(3)}R_{ijkl} = K(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \quad (6.1.1)$$

E sua métrica possui a seguinte forma,

$$dl^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (6.1.2)$$

Portanto, no sistema de coordenadas esféricas, para uma espaço 3d, temos:

$$dl^2 = \exp^{\lambda(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 d\phi^2 \quad (6.1.3)$$

Sendo  $\lambda(r)$  uma função desconhecida, que pode ser determinada usando-se o tensor de Riemann.

Para isto, vamos contrair os dois primeiros índices da equação (3.1.1).

$${}^{(3)}R_{jil}^i = K(\delta_i^i \gamma_{jl} - \delta_l^i \gamma_{ji}) \quad (6.1.4)$$

$${}^{(3)}R_{jl} = K3(\gamma_{jl} - \gamma_{jl}) \quad (6.1.5)$$

$${}^{(3)}R_{jl} = 2K\gamma_{jl} \quad (6.1.6)$$

Vimos no capítulo 3 que as componentes do tensor de Riemann são definidas por:

$$R_{\gamma\alpha\beta}^{\mu} = \frac{\partial\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma_{\eta\gamma}^{\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^{\eta} - \Gamma_{\eta\beta}^{\mu}\Gamma_{\alpha\gamma}^{\eta} \quad (6.1.7)$$

E os coeficientes da conexão são:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}}\right) \quad (6.1.8)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} = \Gamma_{\beta\alpha}^{\mu} \quad (6.1.9)$$

Levando em consideração a métrica (6.1.3), obtemos:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^\lambda & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

e

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/r^2 \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

Fazendo  $\mu = 1$  e variando  $\alpha$  e  $\beta$  (1,2 e 3).

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left( \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x^1} \right) = \frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \frac{\partial e^\lambda}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}\lambda, \quad (6.1.10)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left( \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{21}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \frac{\partial r^2}{\partial r} \right) = -\frac{r}{e^\lambda} \quad (6.1.11)$$

$$\Gamma_{33}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left( \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{31}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} \right) = -\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left( \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \right) \quad (6.1.12)$$

$$\Gamma_{33}^1 = -\frac{r}{e^\lambda} \sin^2 \theta \quad (6.1.13)$$

Fazendo  $\mu = 2$  e variando  $\alpha$  e  $\beta$  (1,2 e 3).

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r^2}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \quad (6.1.14)$$

$$\Gamma_{33}^2 = \frac{1}{2}g^{22} \left( \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{32}}{\partial x^3} - \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \left( -\frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \right) \quad (6.1.15)$$

$$\Gamma_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta \quad (6.1.16)$$

Fazendo  $\mu = 3$  e variando  $\alpha$  e  $\beta$  (1,2 e 3).

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left( \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} - \frac{\partial g_{13}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial r} \right) \quad (6.1.17)$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (6.1.18)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{1}{2}g^{33} \left( \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} + \frac{\partial g_{33}}{\partial x^2} - \frac{\partial g_{23}}{\partial x^3} \right) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left( \frac{\partial r^2 \sin^2 \theta}{\partial \theta} \right) \quad (6.1.19)$$

$$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \cot g \theta \quad (6.1.20)$$

A partir dos coeficientes da conexão conseguimos calcular as componentes do tensor de Riemann.

$$R_{11j}^i = R_{111}^1 + R_{112}^2 + R_{113}^3 \quad (6.1.21)$$

$$R_{22j}^i = R_{221}^1 + R_{222}^2 + R_{223}^3 \quad (6.1.22)$$

$$R_{22j}^i = R_{331}^1 + R_{332}^2 + R_{333}^3 \quad (6.1.23)$$

Logo,

$$R_{112}^2 = \frac{\partial \Gamma_{12}^2}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{\eta 1}^2 \Gamma_{12}^\eta - \Gamma_{\eta 2}^2 \Gamma_{11}^\eta = -\frac{1}{2} \frac{\lambda'}{r} \quad (6.1.24)$$



$$R_{113}^3 = \frac{\partial \Gamma_{13}^3}{\partial x^1} - \frac{\partial \Gamma_{11}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{\eta^1}^3 \Gamma_{13}^\eta - \Gamma_{\eta^3}^3 \Gamma_{11}^\eta = -\frac{1}{2} \frac{\lambda'}{r} \quad (6.1.25)$$

$$R_{221}^1 = \frac{\partial \Gamma_{21}^1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{\eta^2}^1 \Gamma_{21}^\eta - \Gamma_{\eta^1}^1 \Gamma_{22}^\eta = -\frac{1}{2} r \lambda' e^{-\lambda} \quad (6.1.26)$$

$$R_{223}^3 = \frac{\partial \Gamma_{23}^3}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{22}^3}{\partial x^3} + \Gamma_{\eta^2}^3 \Gamma_{23}^\eta - \Gamma_{\eta^3}^3 \Gamma_{22}^\eta = -1 + e^{-\lambda} \quad (6.1.27)$$

$$R_{331}^1 = \frac{\partial \Gamma_{13}^1}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{33}^1}{\partial x^1} + \Gamma_{\eta^3}^1 \Gamma_{31}^\eta - \Gamma_{\eta^1}^1 \Gamma_{33}^\eta = -\frac{1}{2} \lambda r \sin^2 \theta e^{-\lambda} \quad (6.1.28)$$

$$R_{332}^2 = \frac{\partial \Gamma_{32}^2}{\partial x^3} - \frac{\partial \Gamma_{33}^2}{\partial x^2} + \Gamma_{\eta^3}^2 \Gamma_{32}^\eta - \Gamma_{\eta^2}^2 \Gamma_{33}^\eta = \sin^2 \theta (e^{-\lambda} - 1) \quad (6.1.29)$$

Substituindo as equações (6.1.24) a (6.1.29) nas equações (6.1.21), (6.1.22) e (6.1.23) e fazendo as devidas contrações, encontramos o tensor de Ricci para a métrica (6.1.3).

$$R_{11} = \frac{\lambda'}{r} \quad (6.1.30)$$

$$R_{22} = 1 + \frac{1}{2} \lambda' r \exp^{-\lambda} - \exp^{-\lambda} \quad (6.1.31)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} \quad (6.1.32)$$

Substituindo as equações (6.1.30), (6.1.31) e (6.1.32) respectivamente na equação (6.1.6), obtemos:

$$R_{11} = 2k\gamma_{11} \quad (6.1.33)$$

$$\frac{\lambda'}{r} = 2ke^\lambda \quad (6.1.34)$$

$$\frac{de^{-\lambda}}{dr} = 2kr \quad (6.1.35)$$

$$e^{-\lambda} = -kr^2 + A \quad (6.1.36)$$

$$R_{22} = 2k\gamma_{22} \quad (6.1.37)$$

$$1 + \frac{1}{2}\lambda' r e^{-\lambda} - e^{-\lambda} = 2kr^2 \quad (6.1.38)$$

$$1 + kr^2 + kr^2 - (-kr^2 + A) = 2kr^2 \quad (6.1.39)$$

$$A = 1 \quad (6.1.40)$$

Logo,

$$e^{-\lambda} = -kr^2 + A \quad (6.1.41)$$

$$e^\lambda = \frac{1}{1 - kr^2} \quad (6.1.42)$$

Assim a métrica de um espaço 3d homogêneo e isotrópico tem a seguinte forma:

$$dl^2 = \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (6.1.43)$$

# Capítulo 7

## Bibliografía

# Bibliografia

- [1] G. Dvali and S.-H. H. Tye, Phys. Lett. B450, **D72**; [arXiv: hep-ph/9812483].
- [2] F. A. Brito. F. F. Cruz and J. F. N. Oliveira, Phys. Rev. **D71**; [arXiv: hep-th/0502057v3].
- [3] D. Bazeia and F. A. Brito, Phys. Rev. **D61**, 105019 (2000); [arXiv: hep-ph/9912015].
- [4] A. H. Guth, Phys. Rev. **D23**, 349 (1981).
- [5] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and other topological defects*(Cambridge University Press, Cambridge/UK, 1994).
- [6] M. A. M. Souza, D. Bazeia, L. Losano and R. Menezes, Phys. Educ. Volume 6 **N1**. (2012).
- [7] A. Elcio, Quantum Gravity: Strings and M-theory. Volume 27, Number 1, p. 147. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2005.

- [8] S. Domingos, Einstein's static universe. Volume 34, Number 1, p. 1302. Revista Brasileira de Ensino de Física, 2012.
- [9] INACIO, A. S.. **Defeitos Topológicos em Modelos de Campos Escalares**. Dissertação de mestrado, UFPB, 2003.
- [10] VARTULI, R. A. S.. **Efeitos de Dissipação e Flutuação no Processo de Resonância Paramétrica**. Dissertação de mestrado, UERJ, 2007.
- [11] BAZEIA, D.. **Campos Escalares em Ação**. Tese de doutorado, UFPB, 2004.
- [12] FILHO, F. G. C.. **Formalismo de primeira ordem em cosmologia de branas**. Dissertação de mestrado, UFPB, 2009.
- [13] HORVATH, J., LUGONE, G., ALLEN, M. P., SCARANO Jr., S.; TEIXEIRA, R.. **Cosmologia física: do micro ao macro cosmo e vice-versa**. Editora Livraria da Física, 2007.
- [14] PEREIRA, S. F.. **Modelos Cosmológicos Escalares-Tensoriais**. Dissertação de mestrado, UnB, 2006.
- [15] DELBEM, N. F.. **Introdução Matemática aos Modelos Cosmológicos**. Dissertação de mestrado, UNESP, 2010.

- [16] SILVA, L. A.. **Inflação estocástica não-isentrópica**. Tese de doutorado, UERJ, 2013.
- [17] LIDDLE, A.. **An Introduction to modern Cosmology**. WILEY, 2003.
- [18] FILHO, K.S.O., SARAIVA, M. F. O.. **Astronomia e Astrofísica**. Editora Livraria da Física, 2004.
- [19] D. Bazeia, J. R. S. Nascimento, R. F. Ribeiro, and D. Toledo. Phys. A, **30**, 8157 (1997); [arXiv: hep-ph/9905224v1].
- [20] HENRIQUES, A. B.. **A Teoria da Relatividade Geral: Uma Introdução**. Instituto Superior Técnico.
- [21] CARROL, S.. **Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity**. Addison-Wesley, 2004.
- [22] D'INVERNO, R.. **Introducing Einstein's Relativity**. Oxford University Press, 1992.
- [23] SOUZA, R. E.. **Introdução à Cosmologia**. Edusp, 2004.
- [24] CHUMBES, A. E. R.. **Modelos não-lineares de dois campos e aplicações em cenário de mundo-branas**. Dissertação de mestrado, UNESP, 2009.