



UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA  
COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Dissertação de Mestrado

**Confinamento de Monopolo Magnético em Dimensões Extras**

por

**André Luiz Freire da Silva**

Campina Grande

Fevereiro, 2014

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE CAMPINA GRANDE**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**  
**COORDENAÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA**

André Luiz Freire da Silva

**Confinamento de Monopolo Magnético em Dimensões Extras**

Dissertação de mestrado apresentada à Coordenação do Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Campina Grande como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Física

Orientador: Prof. Dr. Francisco de Assis Brito

**Campina Grande**

**Fevereiro, 2014**

S586c Silva, André Luiz Freire da.  
Confinamento de monopolo magnético em dimensões extras /  
André Luiz Freire da Silva. - Campina Grande, 2014.  
57 f.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Federal  
de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2014.  
Referências.  
"Orientação : Prof. Dr. Francisco de Assis de Brito".

1. Física - Eletromagnetismo. 2. Monopolo Magnético. 3.  
Confinamento. 4. Dissertação - Física. I. Brito, Francisco  
de Assis de. II. Universidade Federal de Campina Grande -  
Campina Grande (PB). III. Título

CDU 538.9(043)

# Agradecimento

Primeiramente, agradeço às minhas irmãs Terezinha Marcia, Maria de Lourdes e aos meus sobrinhos Ubirajara Leite e Braythnir Umarana. Eles me ensinaram mais do que moral, ética e respeito. Com eles eu aprendi nada menos do que o significado do que é amar. Há muito, eles sempre me ajudam a trilhar um caminho de satisfação pessoal em tudo que faço. E mais uma vez não foi diferente.

Aos meus pais Manuel Rodrigues e Nelzita Freire e ao meu eterno e amado irmão José Nilton e ao meu tio Totinha, que não estão mais aqui, mas sempre estaremos juntos.

Agradeço ao Professor Francisco de Assis de Brito, pela orientação, amizade e pelas discussões a respeito do tema a ser pesquisado. É sempre muito bom encontrar um professor determinado a fazer você aprender.

Agradeço ao Professor Marcio Pazetti, pelas conversas, pela amizade e pelos conselhos valiosos ao longo desses anos. Agradeço também ao Maikon Pazetti por participar dessa jornada.

Devo agradecer a muitas pessoas do departamento de Física da UFCG. Dentre elas: Miguel Loureço, Rodrigo Lima(BM), a professora Morgana Freire, os professores Danieverton, Eduardo Passos, Diego Cogollo, Fabio Dahia, Anacleto, Licoln, Rômulo e os demais professores e funcionários que participaram de forma direta e indireta. Um grupo maravilhoso com o qual tive a oportunidade de aprender a cada dia.

Aos colegas do departamento de Física, em especial aos que dividiram comigo a sala de estudo.

Obrigado aos meus amigos, Romel Nogueira, Thiago Marcelo, Michel David, Marcelo Andrade, Pedrinho, Lucas, pelas loucuras já vividas( que venham mais)

Agradeço em especial a Newton Nogueira, romel Nogueira, Patricia Pionório, Elza Nogueira e Inácio Nogueira. Eu os considero como uma segunda família.

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, por ter apoiado este estudo com a concessão de uma Bolsa de Mestrado.

# Resumo

A partir do eletromagnetismo de Maxwell, Dirac [11], em 1931, construiu matematicamente, a primeira ideia de monopolos magnéticos, conhecidos como monopolo de Dirac. Um passo além no contexto de tais soluções foi apresentado independentemente por 't Hooft [53] e Polyakov [55] em 1974, mostrando que monopolos magnéticos surgiram de argumentos bastantes gerais, visando a unificação das interações fundamentais. Estas soluções, monopolos de 't Hooft e Polyakov, tubos de fluxo, cordas cósmicas e paredes de domínio, etc., são soluções não triviais das equações de movimento para campos clássicos. Esses defeitos topológicos na teoria de Yang-Mills, permitiu a descoberta de uma estrutura de vácuo complexo na QCD. Na QCD, a característica que define as interações fortes entre quarks é que as interações se tornam arbitrariamente fracas em distâncias curtas, uma propriedade que é geralmente chamada de liberdade assintótica, e extremamente forte a grandes distâncias, de modo que os quarks ficam ligados uns aos outros em um estado de confinamento. O confinamento implica que não há quark livre para serem encontrados na natureza. Para descrever o confinamento de quarks em teoria de gauge  $SU(N)$ , uma proposta é fazer uma analogia com a supercondutividade. Assim como para o confinamento do quark, o efeito Meissner dual é o mecanismo promissor para explicar o confinamento de monopolo magnético. Nesta dissertação, procuramos encontrar uma função  $\widehat{G}(\phi)$ , que esta associada ao confinamento do monopolo imerso em uma hipersuperfície quadrimensional, em um universo de dimensão D-5. O primeiro lugar para procurar é nas teorias não - abelianas, tais como o modelo de Georgi - Glashow, que tem monopolos magnéticos como soluções solitônicas das equações de movimento.

# Abstract

From the electromagnetism of Maxwell, Dirac [11] in 1931, mathematically, built the first idea of magnetic monopoles, known as the Dirac Monopole. A step further in the context of such solutions was presented independently by 't Hooft [53] and Polyakov [55] in 1974, showing that magnetic monopoles arose from quite general arguments, seeking the unification of fundamental interactions. Unlike the Dirac monopoles, which are imposed solutions by hand, the monopoles in theories of Yang-Mills-Higgs appear as solutions of equations of motion. These monopoles are part of a class of solutions consisting of the so-called topological solutions. These solutions, monopoles of 't Hooft and Polyakov, flux tubes, cosmic string, domain walls, etc., are non-trivial solutions of the equations of motion for the classical field. These topological defects in Yang-Mills theory has allowed the discovery of a complex structure in vacuo QCD. In QCD, the defining characteristic of the strong interactions between quarks is that interactions become weak at arbitrarily short distances, a property which is usually called asymptotic freedom, and extremely strong at large distance, so that the quarks are confined to each other in a state of confinement. This implies that no free quarks can be found in nature. To describe the quark confinement in gauge theory  $SU(N)$ , the proposal is to make an analogy with superconductivity. It is often assumed that the electric field lines of color between a quark-antiquark pair will be confined in fluxes. As for the confinement of quark, the Meissner effect is promising dual mechanism to explain the confinement of magnetic monopole. In this dissertation, we seek to find a  $\widehat{G}(\phi)$  function, which is associated to confinement of magnetic monopole in a four-dimensional hypersurface immersed in a universe in size  $D=5$ . The first place to look for is in non-abelian theories, such as the Georgi-Glashow model, which have magnetic monopoles as soliton solutions of the equations of motion.

**Andante** N.Paganini (1782-1840)

on A



*dolce espressivo*

5



on E

Niccol Paganini: "Violin Sonata No 6"

"ligue as pontas do tempo e siga seu caminho "

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Monopolos Magnéticos</b>	<b>5</b>
2.1	Equações de Maxwell . . . . .	5
2.2	Equações de Maxwell na forma covariante . . . . .	10
2.3	Monopolo de Dirac . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Teoria de Yang-Mills SU(2)</b>	<b>17</b>
3.1	Simetria e o Modelo Padrão . . . . .	17
3.2	Teoria não-abeliana . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Confinamento de Monopolo em Dimensões Extras</b>	<b>27</b>
4.1	Dimensões Extras . . . . .	27
4.2	Monopolo Confinado em 5D . . . . .	29
4.2.1	Modelo de Georgi-Glashow . . . . .	29
4.2.2	Modelo de Estudo . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>43</b>
<b>I</b>	<b>Apêndice A</b>	<b>45</b>
<b>II</b>	<b>Apêndice B</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introdução

As equações de Maxwell do eletromagnetismo refletem uma estranha assimetria da natureza. Encontramos cargas elétricas, porém, até agora não encontramos cargas magnéticas. Se as partículas magnéticas ou monopolos magnéticos existissem, teríamos uma simetria perfeita entre a eletricidade e o magnetismo. A partir do eletromagnetismo de Maxwell, Dirac [11], em 1931, construiu, matematicamente, a primeira ideia de monopolos magnéticos, conhecido como monopolo de Dirac. Um passo além no contexto de tais soluções foi apresentado independentemente por 't Hooft [53] e Polyakov [55] em 1974, mostrando que monopolos magnéticos surgiram de argumentos bastantes gerais, visando a unificação das interações fundamentais. Diferentemente dos monopolos de Dirac, que são soluções impostas a mão, os monopolos em teorias de Yang-Mills-Higgs aparecem como soluções das equações de movimento. Esses monopolos fazem parte de uma classe de soluções composta pelas chamadas soluções topológicas. Estas soluções, monopolos de 't Hooft e Polyakov, tubos de fluxo e cordas cósmicas, paredes de domínio, etc, são soluções não triviais das equações de movimento para os campos clássicos. Esses defeitos topológicos na teoria de Yang-Mills, permitiram a descoberta de uma estrutura de vácuo complexo na QCD. Na QCD, a característica que define as interações fortes entre quarks é que as interações se tornam arbitrariamente fracas em distâncias curtas, uma propriedade que é geralmente chamado de liberdade assintótica, e extremamente forte a grandes distâncias, de modo que os quarks ficam ligados uns aos outros em um estado de confinamento. O confinamento implica que não há quark livre para ser encontrados na natureza. Para descrever o confinamento de quark em teoria de gauge  $SU(N)$ ,

uma proposta é fazer uma analogia com a supercondutividade. Costuma-se supor que as linhas de campo elétrico de cor entre um par quark-antiquark vai ser confinada em tubo de fluxo. Essa idéia de supercondutividade dual é atraente, e tem tido uma enorme influência sobre o pensamento de varios cientistas para explicar o confinamento. Assim como para o confinamento do quark, o efeito Meissner dual é o mecanismo promissor para explicar o confinamento de monopolo magnético. Nesta dissertação, procuramos uma função  $\widehat{G}(\phi)$ , que está associada ao confinamento do monopolo magnético imerso em uma hipersuperfície quadridimensional, em um universo de dimensão  $D=5$ . O primeiro lugar para procurar é nas teorias não-abelianos, tais como o modelo de Georgi-Glashow, que têm monopolos magnéticos como soluções solitônicas das equações de movimento.

No próximo capítulo, é apresentado uma breve revisão das equações de Maxwell. A partir da dualidade eletromagnética, é feita uma discussão sobre soluções de monopolos magnéticos nas equações de maxwell. Essa revisão servirá para introduzir o monopolo de Dirac, onde é admitido potenciais singulares ao longo de uma linha chamada corda de Dirac. No capítulo 3, será discutido o Modelo Padrão como uma teoria que identifica as partículas elementares e suas interações. No âmbito desta teoria, soluções topológicas, como por exemplo, configurações de monopolo magnético, podem ser obtidas a partir de uma teoria  $SU(2)$  de Yang-Mills-Higgs. No Capítulo 4, sob o ponto de vista da proposta do nosso trabalho, é feito uma revisão sobre dimensões extras, no qual fizemos uso de uma métrica curva do espaço-tempo em 5 dimensões. Em seguida, partindo do modelo de Georgi-Glashow, onde a existência de monopolos é assegurada pelos argumentos apresentados nesta dissertação, mostramos que o confinamento sera dado por uma função "dielétrica", cujo comportamento é governado por um campo escalar  $\phi(\rho)$ . Para finalizar, mostramos que esta função é responsável pelo potencial linear entre os monopolos imersos no supercondutor tipo II.

## Capítulo 2

# Monopolos Magnéticos

A experiência nos mostra que quando um ímã é quebrado em dois, cada um dos pedaços constitui um dipolo Norte-Sul. Apesar da falta de evidências experimentais, existem razões para se acreditar que é possível encontrar um ímã com apenas um polo? Em 1931, o físico Paul Dirac [11] afirmou que sim. Dirac mostrou que a existência dessa partícula magnética é de fundamental importância para explicar o por que a carga elétrica é quantizada. Inspirados no artigo de Dirac, vários cientistas estudaram a possibilidade da existência dos monopolos magnéticos e a maneira pela qual eles poderiam ser detectados. O Laboratori Nazionali del Gran Sasso é um dos laboratórios mais importante e que vem desenvolvendo experimentos em busca dos monopolos [35][36][37][38]. Discussões sobre a possibilidade da presença de monopolos magnéticos podem ser vista em [39][40][41].

### 2.1 Equações de Maxwell

O Eletromagnetismo tem uma longa história. Aqui nos limitaremos a apresentar alguns dos momentos principais e as pessoas associadas à teoria. Para uma discussão mais detalhada ver [1] [2]. Começamos esse breve relato a partir das primeiras observações científicas acerca do monopolo magnético.

Em 1269, quando o monge franciscano, Petrus Peregrinus, ao realizar experiências com a agulha magnética, escreveu a “Epístola do magnetismo”, ele foi o primeiro a frisar o termo “polo” para descrever a repulsão entre partes de magnetes de igual polaridade, notando ainda que, quando se divide o ímã em dois, cada metade con-

tinua a ter polos opostos, em vez de se isolar um monopolo magnético. Em 1600, William Gilbert [3] publicou o livro **De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete tellure physiologi**, reunindo conhecimentos sobre os ímãs e suas propriedades. Entre 1819-1820, o farmacêutico e físico dinamarquês Hans Christiaan Oersted (1777-1851) realizou experiências com as quais procurava descobrir relações entre a eletricidade e o magnetismo. Uma de suas experiências foi analisar o que acontecia com uma agulha magnética ao ser colocada perpendicularmente ao fio condutor do circuito galvanico utilizado. Oersted notou que correntes podiam defletir ímãs, estabelecendo assim que correntes geram campo magnético. Até 1820, eletricidade e magnetismo eram considerados fenômenos distintos. Entre 1820 e 1830, Faraday e Ampère, em uma das maiores unificação dos tempos modernos [4], mostraram que a eletricidade e magnetismo, são dois aspectos de uma única força: o eletromagnetismo. Faraday estava convencido de que havia uma conexão profunda entre fenômenos elétricos e magnéticos. A visão do Eletromagnetismo de Faraday [5] consistia em linhas de campo, o que simplificou tremendamente a matemática da teoria. Esse conceito de campo foi a peça fundamental usada por Maxwell posteriormente. Em 1865, em seu trabalho intitulado como **A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field** [6], Maxwell, com sua percepção genial, introduziu a chamada corrente de deslocamento, mostrando mais uma unificação, da óptica com o eletromagnetismo, ao propor o termo  $\partial_t \vec{E}$  da lei de Ampère-Maxwell. A visão de mundo da época em que as leis do eletromagnetismo foram estruturadas através das equações de Maxwell concebia espaço vazio como um meio – o “éter” – e por isso Maxwell denominou o termo  $\partial_t \vec{E}$  por “corrente de deslocamento” pois imaginava que essa “corrente” estaria se deslocando em alguma coisa. A concepção do “éter” estava refletida, inclusive, nos diversos experimentos em que se procurava medir a velocidade da luz em relação a ele. Como toda teoria, diversos experimentos foram realizados a fim de testar a consistência das equações de Maxwell em sistemas de referência em movimento. O mais famoso foi o experimento realizado por Albert Michelson (1852-1931) e Edward Morley (1838-1923) em 1887, onde não foram capazes de detectar qualquer efeito do “éter” como meio elástico capaz de transmitir ondas eletromagnéticas. Finalmente, isso nos conduz a Einstein. Abrindo o caminho para relatividade restrita, em seu artigo “Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento”, Einstein começa apresentando assimetrias na Eletrodinâmica de Maxwell quando aplicada em corpos em movimento. Motivado pela incompatibil-

idade dos fenômenos eletromagnéticos com a existência do éter, quando analisados sob a ótica do movimento relativo, a teoria da relatividade restrita começou a ser desenvolvida especificamente para considerar esse efeito. Embora o formalismo da teoria da relatividade restrita tenha sido construído anteriormente por Poincaré, Lorentz e outros, foi Einstein que, em 1905, deu ênfase através de uma embasada descrição unificada da mecânica e da eletrodinâmica com apenas dois postulados: (a) os referenciais inerciais são equivalentes no que diz respeito às leis físicas.; (b) a velocidade da luz, no vácuo, é uma constante universal e independe da velocidade da fonte. As equações do eletromagnetismo, mesmo tendo sido formuladas antes da relatividade de Einstein, obedecem ao princípio de que todas as leis físicas são as mesmas em todos os sistemas inerciais. Dessa forma a unificação iniciada por Maxwell encontra em Einstein a sua culminância: eletricidade e magnetismo são, de fato, uma só interação, assumindo formas distintas de acordo com o sistema de referência em que são descritas. É possível escrever essas equações de modo que elas relacionem os campos com suas fontes da mesma maneira em todos os referenciais, ou seja, como veremos adiante, é possível uma formulação covariante das equações de Maxwell.

Alem disso, as equações de maxwell possuem duas simétrias ocultas, de lorentz e a de gauge. A simetria de gauge vem encontrando grande repercussão na física, não só no entendendimento do acoplamento do eletromagnetismo com a matéria, mas também na formulação consistente com outras duas interações fundamentais da natureza: intereção forte e a intereção fraca. Suas equações serviram como base para muitos desenvolvimentos futuros na física, tais como a relatividade restrita, relatividade geral e a teoria de Kaluza-Klein da unificação do eletromagnetismo com a gravidade. Na década de 1920, Kaluza [7] e Klein [8], ver também [9], demonstraram que as equações de Maxwell podem ser derivadas ao se estender a relatividade geral a cinco dimensões. Esta estratégia de se usar dimensões maiores para unificar diferentes forças é uma área de interesse ativo na física de partículas ainda nos dias de hoje.

No vácuo, as equações de maxwell são escritas como:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (2.4)$$

Observamos uma simetria entre os pares de equações ao fazermos a seguinte transformação

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{B} \quad (2.5)$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{E} \quad (2.6)$$

Esta invariância que surge após o mapeamento entre os campos elétricos e magnéticos é chamada dualidade eletromagnética. Quando temos a presença de fontes, as equações de Maxwell, no SI, ficam da seguinte forma.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_o} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o \vec{J}_e \quad (2.10)$$

e perdermos a simetria sob a transformação (2.5) e (2.6). As assimetrias existentes entre os campos são reflexos das próprias equações de Maxwell, pois a não-existência do monopolo magnético faz com que essas equações não sejam simétricas. Se o monopolo magnético existisse, o divergente de  $\vec{B}$  seria diferente de zero e poderia existir uma corrente magnética que, incluída na lei de Faraday, seria mais uma fonte do campo elétrico. A construção da teoria eletromagnética clássica, por alguma razão, não usou essa oportunidade.

A introdução de monopolos magnéticos aparece também como uma necessidade quando se deseja introduzir a dualidade eletromagnética com fontes [10]. Porém, quando cargas elétricas e magnéticas estão presentes torna-se impossível expressar  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  em termos de um único potencial. Como veremos, manter a mesma estrutura de potenciais, como é feito usualmente no eletromagnetismo, implica em singularidades no potencial vetor [11]. Para evitar tais singularidades, Cabibbo e Ferrari propuseram o eletromagnetismo com um potencial adicional. Para um estudo mais detalhado sobre dualidade e a consequência da introdução do potencial extra ver

[12]. A simetria de dualidade presente nas equações de Maxwell, vem recebendo bastante atenção tendo em vista a sua relação com as simétrias de dualidades presentes em teorias de cordas [13]. Um estudo sobre dualidades eletromagnéticas pode ser encontrado em [15][16][17].

Pela equação (2.2 ), temos que

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.11)$$

usando a expressão acima na Lei de Faraday, temos

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial(\nabla \times \vec{A})}{\partial t} = \nabla \times \left(-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) \rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad (2.12)$$

o termo entre parênteses é o gradiente de um campo escalar  $\phi$ , portanto

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (2.13)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.14)$$

uma observação importante a ser feita é que se  $\phi$  e  $\vec{A}$  são soluções das equações de Maxwell, então, os potenciais  $\phi'$  e  $\vec{A}'$ , definidos por

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \times \chi \quad (2.16)$$

para um  $\chi = \chi(x, t)$  qualquer, também são. Logo,

$$\vec{E}' = -\nabla\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = \vec{E} = -\nabla\phi + \nabla\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial(\nabla\chi)}{\partial t} \quad (2.17)$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}$$

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times (\vec{A} + \nabla \times \chi) = \vec{B} \quad (2.18)$$

ou seja, temos a liberdade de escolher a função  $\chi$  convenientemente sem alterar os campos. Na eletrodinâmica clássica dois gauges são tradicionalmente usados para

determinarmos completamente o potencial vetor: gauge de Lorentz e o gauge de Coulomb.

O gauge de Lorentz é usado nas soluções de ondas eletromagnéticas, e é dado por

$$\nabla \cdot \vec{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.19)$$

e o gauge de Coulomb, dado por

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.20)$$

é mais utilizado em eletrostática e magnetostática. Uma observação a ser feita é que o gauge de Lorenz é invariante relativisticamente, ao passo que o de Coulomb não o é, ver [10].

## 2.2 Equações de Maxwell na forma covariante

As equações de Maxwell, independentemente do ferramental matemático que lhes está atribuída, conseguem algo de notável: reunir todos os fenômenos elétricos e magnéticos, e explicá-los de uma forma elegante e simples. E é exatamente algo do gênero que hoje em dia queremos fazer para a Física de Partículas. A covariância de uma lei da natureza significa que, por mudança de sistema de referência, a relação entre as diferentes quantidades físicas não varia. Portanto, de acordo com o princípio da relatividade, qualquer relação entre quantidades físicas deve ser expressa por meio de equações covariantes.

Tomando o divergente da equação (2.10),

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} + \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_e = 0 \quad (2.21)$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d(\frac{\rho_e}{\epsilon_0})}{dt} + \mu_0 \nabla \cdot \vec{J}_e = 0 \quad (2.22)$$

$$= \mu_0 \left( \frac{d\rho_e}{dt} + \nabla \cdot \vec{J}_e \right) = 0 \quad (2.23)$$

obtemos a equação da continuidade

$$\frac{d\rho_e}{dt} + \nabla \cdot \vec{J}_e = 0 \quad (2.24)$$

Sendo  $\rho$  a densidade de carga, temos  $dq = \rho d^3x$  é um invariante de Lorentz. Como o volume é um invariante, pois o Jacobiano da transformação de  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  é  $\det \Lambda^\mu_\nu = 1$ , portanto, podemos definir uma quadri-corrente, dado por:

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}) \quad (2.25)$$

assim, a equação

$$\frac{\partial j^\mu}{\partial t} = 0 \quad (2.26)$$

tem como consequência a conservação da carga

$$\frac{d\rho_e}{dt} + \nabla \cdot \vec{J}_e = 0 \quad (2.27)$$

e, definindo o quadri-potencial

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \quad (2.28)$$

e usando o Laplaciano  $\square$ , obtemos a equação covariante

$$\square A^\mu = -\mu_0 j^\mu \quad (2.29)$$

que implica as equações de onda. Com a seguinte expressão

$$\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} = 0 \quad (2.30)$$

obtemos o gauge de Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.31)$$

Como sabemos, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  tem 6 componentes no total, e pela relação com os potenciais, eles devem ser derivadas primeiras de  $A^\mu$ . Como um tensor de rank 2 anti-simétrico tem exatamente 6 componentes independentes, podemos definir o tensor de campo  $F^{\mu\nu}$ , denominado Tensor de Maxwell como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu = \partial^{[\mu} A^{\nu]} \quad (2.32)$$

e o seu dual  $\tilde{F}^{\mu\nu}$ , dado por

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \quad (2.33)$$

onde, podemos ter

$$F_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha}F^{\alpha\beta}\eta_{\beta\nu} \quad (2.34)$$

em termo das componentes , temos :

$$F_{0i} = \frac{\vec{E}_i}{c} \quad (2.35)$$

$$F^{ij} = -\epsilon_{ijk}\vec{B}_k \quad (2.36)$$

$$\tilde{F}^{oi} = \vec{B}_i \quad (2.37)$$

$$\tilde{F}^{ij} = \epsilon_{ijk}\frac{\vec{E}_k}{c} \quad (2.38)$$

em forma matricial,

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_x}{c} & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{E_y}{c} & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{E_z}{c} & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

vimos que no vácuo, onde temos  $j^\mu = 0$ , as equações de Maxwell são simétricas sobre as transformações (2.5) e (2.6) que é equivale a fazer a troca

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}_{\mu\nu} \quad , \quad \tilde{F}_{\mu\nu} \rightarrow F_{\mu\nu} \quad (2.40)$$

Da mesma forma que a mecânica newtoniana, a eletrodinâmica de maxwell admite uma formulação lagrangiana. Para isso , é necessário generalizar a lagrangiana de pontos materiais para campos contínuos. Primeiramente, devemos impor que a ação seja um invariante de Lorentz. Assumindo que  $S$  seja um escalar, então

$$S = \int d^4x L \quad (2.41)$$

onde

$$L = L[A^\mu, \partial^\nu A^\mu] = -\frac{1}{16\pi} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{c} J^\mu A_\mu \quad (2.42)$$

As equações de movimento são obtidas variando a equação (2.42) em relação a  $A^\mu$  e suas derivadas. Assim,

$$\frac{\partial L}{\partial A^\mu} = -\frac{1}{c} J^\mu \quad (2.43)$$

calculando o produto  $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ ,

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) (\partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha) \quad (2.44)$$

derivando em relação a  $\partial^\rho A^\sigma$  e usando a anti-simetria de  $F_{\rho\sigma}$ , encontramos

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial^\rho A^\sigma)} = -\frac{1}{4} F_{\rho\sigma} \quad (2.45)$$

Finalmente, usando a Equação de Euler-Lagrange, obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial A^\mu} - \partial^\sigma \left[ \frac{\partial L}{\partial(\partial^\sigma A^\mu)} \right] = 0 \rightarrow \partial_\alpha F^{\alpha\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\mu \quad (2.46)$$

a equação (2.46) são as equações de maxwell com fontes. Por (2.46) e usando a simetria de  $\partial_\mu \partial_\alpha$  e a anti-simetria de  $F^{\alpha\mu}$ , obtemos a conservação da corrente

$$\partial_\mu \partial_\alpha F^{\alpha\mu} = 0 = \partial_\mu J^\mu \quad (2.47)$$

As equações de Maxwell sem fontes decorre trivialmente a partir do tensor dual  $\tilde{F}^{\mu\nu}$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha) = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \partial_\alpha A_\beta = 0 \quad (2.48)$$

a equação (2.48) é nula devido a anti-simetria de  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$  e à simetria de  $\partial_\mu \partial_\alpha A_\beta$ . Contraindo a equação (2.48) com  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\nu}$ .

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} \partial_\mu F^{\kappa\lambda} = 0 \quad (2.49)$$

obtemos a identidade de Bianchi

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta A_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma A_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.50)$$

À luz do eletromagnetismo, podemos interpreta-la como uma generalização das equações homogêneas de Maxwell.

## 2.3 Monopolo de Dirac

Como vimos, as equações de Maxwell relacionam campos elétricos e magnéticos ao movimento de cargas elétricas. A forma padrão das equações foi estabelecida para carga elétrica, mas não para carga magnética. Exceto por isto, as equações são simétricas sob a troca de campos elétricos e magnéticos. De fato, as equações podem ser escritas quando todas as cargas são nulas, é assim, como a equação de onda é deduzida. Para simetria completa das equações pode ser escrito se cogitarmos a possibilidade de cargas magnéticas análoga a cargas elétricas. Com a inclusão de uma variável para densidade dessas cargas magnéticas, digamos  $g\delta^3(\vec{x})$ , onde  $g$  é a carga magnética localizada na origem, existirá também uma densidade de corrente magnética variável nas equações, representada por  $k_m$ .

No início do século XIX houve discussões relativas ao conteúdo magnético da matéria e algumas especulações sobre a possível existência de cargas magnéticas isoladas. Vários físicos tem se esforçado para encontrar efeitos do monopolo magnético. Suas pesquisas acabam sendo classificadas de acordo com as teorias que utilizam, como por exemplo, teoria abeliana e teoria não - abeliana. Um grande avanço teórico e convincente em favor da existência de monopolos magnéticos (não massivos) foi apresentada por Dirac [11] em 1931. Em seu artigo, Dirac estuda com detalhes a questão se o elétron seria uma partícula elementar ou não. Para isso, ele precisou classificar as possíveis singularidades do campo eletromagnético. Segundo Dirac, para contemplar esse monopolo, as equações de Maxwell deveriam tomar a seguinte forma:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_o} \quad (2.51)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = g\delta^3(\vec{r}) \quad (2.52)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{k}_m \quad (2.53)$$

$$\nabla \times \vec{B} - \mu_o\epsilon_o\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_o\vec{J}_e \quad (2.54)$$

com

$$\delta^3(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \infty, & \vec{r} = 0 \end{cases}$$

Considerando uma superfície fechada S e usando simetria esférica, a equação (2.52) fornece um campo magnético dado por:

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{r} \quad (2.55)$$

Onde  $\vec{r}$  representa o raio da superfície esférica que engloba a carga g. Estes monopolos possuem estruturas de singularidades fisicamente não detectáveis que são descritas por novo potencial vetor  $\vec{A}$ , associado ao campo magnético (2.55), dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{g}{2\pi r} \frac{1 \pm \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\varphi} \quad (2.56)$$

ou,

$$\vec{A}_+ = \frac{g}{2\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\varphi} \quad (2.57)$$

$$\vec{A}_- = \frac{g}{2\pi r} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \hat{\varphi} \quad (2.58)$$

onde  $\theta$  é a coordenada azimutal e  $\varphi$  é o ângulo no plano xy. Como  $\nabla \cdot \vec{B} \neq 0$ , Dirac propôs que o potencial vetor  $\vec{A}$  deveria ser definido em todo o espaço contido em S, exceto em uma "linha" (Dirac String), contínua que liga a origem ao infinito. As equações (2.57) e (2.58) nos fornecem uma nova singularidade. Qualquer que seja o raio da esfera, a singularidade sempre estará presente em  $\theta \rightarrow \pi$  e  $\theta \rightarrow 0$ . Para cada instante de tempo, a singularidade ocorre numa "linha" (Corda de Dirac) que se estende a partir do monopolo para o infinito: Para  $\theta \rightarrow \pi$ , o potencial vetor

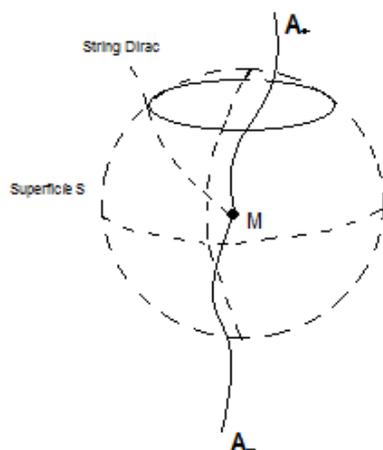


Figura 2.1: Monopolo de Dirac

$\vec{A}_-$  possui uma Dirac string (singularidade) ao longo do eixo  $z$  negativo. Do mesmo modo, para  $\theta \rightarrow 0$ , o potencial  $\vec{A}_+$  possui uma Dirac string (singularidade) ao longo do eixo  $z$  positivo, ver fig 2.1.

Da "impossibilidade" de observação da "Dirac string", particularmente, vale ressaltar que o artigo [18] dá uma interpretação topológica para Dirac string, Dirac mostrou [11] que, para todos os monopolos magnéticos no universo e para todas as partículas eletricamente carregadas no universo devemos ter

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c \quad (2.59)$$

A equação (2.59) é conhecida na literatura como condição de Dirac.

Em 2013, [26] M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Möttönen & D. S. publicaram na Nature um estudo sobre a possibilidade da existência da corda de Dirac

# Capítulo 3

## Teoria de Yang-Mills $SU(2)$

Desde 1954, um tipo especial de teoria de campo clássica conhecida como uma teoria de Yang-Mills [27]. Com exceção da gravidade, muitas teorias importantes da física moderna são versões quantizadas das teorias de Yang-Mills. Estas incluem a teoria eletrofraca de Weinberg e Salam, o modelo padrão da física de partículas. A história da teoria de Yang-Mills é longa e muitas das idéias centrais foram desenvolvidas independentemente por físicos e matemáticos, por razões completamente diferentes. Uma recente e completa compilação sobre o entendimento das teorias de Yang-Mills nos últimos cinquenta anos pode ser encontrado em [28].

### 3.1 Simetria e o Modelo Padrão

Nesta dissertação, não será feito um estudo sobre o modelo padrão em si, uma vez que exige uma discussão detalhada de como quantizar uma teoria de campo, o que nos tomaria muito tempo. Uma excelente introdução sobre o Modelo Padrão encontra-se em [21][22].

A partir dos anos 30, com a invenção dos aceleradores de partículas, grandes avanços experimentais ocorreram. O entendimento de que os elétrons, os prótons e os neutrons, descobertos respectivamente em 1897, 1911 e 1932 eram os constituintes elementares do átomo, foram profundamente alterados à medida que progrediram os experimentos. Desses, apenas o elétron continua a ser considerado uma partícula elementar. O próton e o nêutron, perderam essa condição com a descoberta de serem compostos por partículas mais fundamentais - os quarks. Com o desenvolvi-

mento da física de partículas, mais duas interações, além das já conhecidas interação eletromagnética e interação gravitacional, foram descobertas: a interação fraca e a interação forte. Com todo esse avanço, o século passado testemunhou a descoberta de centenas de novas partículas, como por exemplo os mésons  $\pi$ , o múon ( $\mu$ ) entre outras, que trouxe consigo, por um lado, melhor entendimento da matéria, e por outro, o intrigante comportamento de algumas. Esse zoológico de partículas, assim chamado pelo físico Enrico Fermi, gerou a necessidade de compreender e organizar o complexo e vasto campo das partículas subatômicas. Essas descobertas conduziu aos Físicos a dar uma grande ênfase ao conceito de *quebra de simetria*. É importante lembrar que em 1915, Emmy Noether, em seu trabalho mais famoso, conhecido como Teorema de Noether, prova a relação entre a existência de simetrias e os princípios de conservação na Física. As simetrias podem se manifestar de forma contínua ou discreta. As simetrias contínuas, tanto do espaço-tempo como internas, pelo teorema de Noether correspondem a leis de conservação. Já as simetrias discretas não conduzem a leis de conservação, porém, em contraste com a carga usual de Noether, esta simetria permite associar uma carga topológica para partículas solitônicas. A teoria da simetria discreta das partículas elementares considera três princípios: carga, paridade, tempo - CPT. O princípio da simetria de paridade define um operador  $\wp$  que inverte as coordenadas espaciais, ou seja  $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, -\vec{x})$ . A Simetria de conjugação de carga, onde uma operação de simetria transforma uma partícula em sua antipartícula; A reversão temporal  $\mathfrak{S}$  atua na forma  $(t, \vec{x}) \rightarrow (-t, \vec{x})$ . Um grande avanço teórico se deu em 1956 quando Lee e Yang verificaram que a lei da preservação da paridade não seria válida no caso das interações fracas entre as partículas [19]. Em 1957, Wu [20] realizou um experimento onde deixa claro a evidência de violação da paridade pela interação fraca. A união de simetrias espaciais (invariância de Lorentz) e de simetrias de gauge permitiu a construção do Modelo Padrão. Muitos pesquisadores se dedicariam à tarefa de procurar partículas ainda mais fundamentais e a criar modelos para organizá-las. Dos vários modelos criados, o de maior sucesso foi o de Gell-Mann, chamado de modelo dos quarks.

A ideia de utilizar simetrias, talvez por evidenciar a harmonia e a simplicidade na construção de teorias, ajuda a encontrar aspectos unificadores na física pela ênfase na similaridade entre diferentes áreas e diferentes objetos. Tanto na física clássica quanto na física quântica [23], a existência de simetrias em um sistema físico leva a uma variedade de simplificações. Seu princípio está associado a uma classe

de transformações que se agrupam em uma classe chamada de grupos. De forma resumida, dizemos que um grupo é um conjunto finito ou infinito de elementos que tem uma certa estrutura ou propriedade.

Em sua teoria da relatividade restrita, apresentada em 1905, Einstein formula o princípio da não existência de referenciais especiais no universo. Sua teoria era restrito a referenciais com movimentos uniforme, ou referenciais inercias. Em sua teoria da relatividade geral(1915), Einstein apresentou uma formulação mais geral, no caso para referenciais não inerciais. Einstein realizou uma generalização da física no sentido de que, em sua teoria, a curvatura do espaço e tempo determinava a gravitação. Curvatura é uma noção geométrica, ao passo que gravitação é uma interação fundamental da natureza. Einstein identificou as duas, levando assim a cabo a geometrização da física. Para referenciais inerciais e considerando que as quantidades físicas sejam dadas por um quatrivector  $V_\mu$ , uma mudança de referencial será dada por

$$V'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} V_\mu = \Lambda^\mu_\nu V_\mu \quad (3.1)$$

onde  $\Lambda^\mu_\nu$  é a matriz de Lorentz. A equação (3.1) é conhecida como transformação de Lorentz e independe da localização do espaço-tempo, ou seja, são transformações globais. Esse grupo das transformações de Lorentz é um exemplo do que denominamos simetria global. A generalização para referenciais não inerciais e gravitacionais, conduziu Einstein a generalizar essas transformações, tornando-as simetrias locais. Sendo assim, as medidas de grandezas físicas em diferentes referenciais não podem mais estar relacionadas pela (3.1) e sim por:

$$dV'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dV_\mu + V_\mu \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\nu \partial x'^\lambda} dx'^\lambda \quad (3.2)$$

o termo extra é conhecido como conexão afim ou símbolo de Christoffel.

Inspirado na teoria da relatividade geral, Hermann Weyl [24] sugeriu a ideia de construir uma teoria geométrica para o eletromagnetismo, com a esperança de unificar a relatividade geral com o eletromagnetismo. Einstein também conjecturou a ideia do eletromagnetismo ser visto como uma propriedade da geometrização do espaço-tempo. Weyl imaginou que o eletromagnetismo deveria estar relacionado com uma nova conexão que relacionava os comprimentos do vetor em diferentes posições,

baseando-se na propriedade local. A teoria original de Weyl ficou conhecida como teoria de calibre. Porém, a teoria apresentava problemas com a mecânica quântica. Em 1929, após a publicação do trabalho de H. Weyl, V. Fock e F. London, Weyl retornou ao trabalho sobre as transformações de calibre, propondo uma interpretação das transformações não como uma mudança de escala, mas como uma mudança nas fases das funções de onda, desde que interpretemos essa fase como uma nova variável local. Entretanto, esta simetria não tem origem geométrica, como é o caso da gravitação. No caso das interações de calibre, ela é fundamentada no conceito de espaço interno, e esse espaço não pode ser observado diretamente. Pode-se encontrar em [25] uma discussão interessante sobre a história da simetria de calibre.

Muitos estudos foram feitos sobre a importancia da simetria de gauge na descrição das interações fundamentais entre partículas elementares e no surgimento da teoria de grande unificação(GUT). Como fruto desses estudos, a escolha do grupo de gauge permite determinar quais são os campos vetoriais da teoria, seus termos cinéticos e de auto-interação e como se dá o acoplamento (através da derivada covariante) entre estes campos e os demais. Para o modelo padrão de interações fundamentais, o grupo de simetria é obtido através da combinação da teoria eletrofraca e a QED, formando um único grupo que é quebrado através de um processo de quebra espontânea de simetria. O grupo do modelo padrão é

$$SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1) \quad (3.3)$$

onde o subíndice C indica a cor, o subíndice L indica a natureza quiral do grupo SU(2) e o subíndice Y representa a hipercarga. No contexto da QED, a interação entre duas partículas eletricamente carregadas é mediada através da troca de fótons, que são descritos por um campo vetorial invariante sob a transformação abeliana U(1). A QED possui uma simetria bastante conhecida, a simetria de calibre, que implica na invariância do lagrangeano sob as transformações

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} g^{-1} \partial_\mu g \quad (3.4)$$

onde  $g = e^{-ie\alpha(x)}$  é uma função do parâmetro  $\alpha(x)$  arbitrário. O conjunto de todos os  $g$  forma um grupo, o grupo das transformações unitárias U(1). O método proposto por Yang e Mills em 1954 [30], para generalizar a transformação citada acima para

um grupo  $SU(2)$ , considera que a interação fraca e a interação forte poderiam ser descritas por meio de campos de gauge vetoriais não-abelianas. Porém, as tentativas de utilização da TQC na descrição das interações fortes e fracas, fracassaram. Na década de 60, o problema da massa da partícula intermediária era comum tanto para a interação forte, quanto para interação fraca. Com a descoberta da quebra espontânea de simetria, cuja inspiração remonta à Física da Matéria Condensada, em 1964, o mecanismo de Higgs surgiu entre os físicos teóricos pela primeira vez para explicar como os modos de Nambu-Goldstone adquirem massa. Tendo o conhecimento do mecanismo de Higgs, Weinberg teve uma idéia genial: utilizar o mecanismo de Higgs na teoria de Glashow e ver se os bósons adquiriam massa da forma correta. Surgiu aí a teoria GWS -Glashow, Weinberg e Salam-, que hoje é conhecida como Modelo Padrão das Partículas Elementares. Nenhuma partícula tinha massa, inicialmente, e o mecanismo de Higgs era o responsável por gerar massa para todas elas, inclusive três dos quatro bósons vetoriais que apareciam no modelo, o  $W^+$ ,  $W^-$  e o  $Z^0$ , enquanto o bóson vetorial sem massa foi identificado com o fóton. Uma das consequências do mecanismo de Higgs é o aparecimento de uma partícula escalar fundamental com massa, o bóson de Higgs.[29]. Nesse cenário, Glashow, Weinberg e Salam conseguiram montar, de forma independente, uma TQC que descrevia, de maneira precisa, as principais características das interações forte e fracas. Em 1971, após o sucesso da TQC, 't Hooft [31] apresentou sua teoria baseando na ideia de que as teorias de calibre não-abelianas eram renormalizáveis. A teoria de 't Hooft teve como resultado a unificação das três interações, exceto a interação gravitacional, em uma única teoria de gauge, baseada no grupo, ver equação (3.3), que como foi citado anteriormente, recebe o nome de modelo padrão das interações fundamentais. Nessa dissertação, estaremos interessado em particular na teoria  $SU(2)$  de Yang-Mills. Sob essa, obtemos soluções solitônicas. Em teoria quântica de campos, esses defeitos descrevem, por exemplo, monopólos, vórtice, instantons, cordas cósmicas, paredes de domínio. Uma ótima introdução sobre sólitons se encontra em [32][33][34]

## 3.2 Teoria não-abeliana

Teorias de gauge não-abelianas têm algumas diferenças com relação a teoria abelianas, como por exemplo, a existência de uma multiplicidade de campos de calibre e auto-interações. A partir da densidade Lagrangiana do campo eletromag-

nético com as fontes, é possível obter as equações de Yang-Mills usando as equações de Euler-Lagrange. Dessas equações é possível obter as equações de Maxwell. Para isso, vamos considerar uma teoria de gauge não-abeliano SU(2) em quatro dimensões definida pela densidade lagrangiana

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\rho}^a F_a^{\mu\rho} + gJ_a^\mu A_\mu^a \quad (3.5)$$

onde definimos o tensor não-abeliano, por

$$F_{\mu\rho}^a = \partial_\mu A_\rho^a - \partial_\rho A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\rho^c \quad (3.6)$$

$A_\nu^a$  é o campo de gauge,  $J_a^\mu$  são as fonte de carga, e  $f^{abc}$  são as constantes de estruturar do grupo. Onde  $f^{abc}$  obedece a relação de anti-simetria[ver apêndice A]. De modo geral, para o grupo SU(N), o primeiro termo da equação (3.5) descreve a energia cinética dos  $N^2 - 1$  campos de gauge e suas respectivas auto-interações. O segundo termo descreve a interação dos campos com a corrente. Para esta dissertação, estaremos trabalhando com o grupo SU(2). Nesse caso, a constante de estrutura  $f^{abc}$  será dada pelo tensor de Levi - Civita, ou seja,  $\epsilon^{abc}$ .

Aplicando o método variacional da Teoria Clássica de Campos, obtemos as equações de movimento

$$\partial_\mu F_b^{\mu\nu} + g\epsilon^{bca} A_\mu^c F_a^{\mu\nu} = gJ_b^\nu \quad (3.7)$$

onde  $J_b^\mu = (\rho^a, -\vec{J}^a)$  é a quadri-corrente.

Na eletrodinâmica clássica, o campo elétrico  $\vec{E}$  e o campo magnético  $\vec{B}$ , são definidos em termos das componentes do tensor  $F_{\mu\nu}$  da seguinte forma

$$E_i = F_{0i} = F_{\mu\nu} = -F_{i0} = -F^{0i} \quad (3.8)$$

$$B_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}F^{ij} \quad (3.9)$$

com  $i,j,k = 1,2,3$ . Para o caso não-abeliano SU(2), temos que o campo de gauge é dado por  $A_\mu^a = (A_\mu^{0a}, -\vec{A}^a)$ . O campo elétrico  $\vec{E}^a$  e o campo magnético  $\vec{B}^a$  são definidos, respectivamente, por

$$E_i^a = F_{i0}^a = \partial_i A_0^a - \partial_0 A_i^a + g\epsilon^{abc} A_i^b A_0^c \quad (3.10)$$

$$B^{aj} = -\frac{1}{2}\epsilon^{jik} F_{ik}^a = -\frac{1}{2}\epsilon^{jik} (\partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a + g\epsilon^{abc} A_i^b A_k^c) \quad (3.11)$$

na forma vetorial, temos

$$E^a = -\vec{\nabla} A_0^a - \partial_t A^a + g\epsilon^{abc} \vec{A}^b \vec{A}^c \quad (3.12)$$

$$\vec{B}^a = \vec{\nabla} \times \vec{A}^a - \frac{1}{2}g\epsilon^{abc} (\vec{A}^b \times \vec{A}^c) \quad (3.13)$$

usando a definição (3.10) e (3.7) obtemos a primeira equação de Maxwell para a teoria de Yang-Mills SU(2)

$$\partial_i E_i^a + g\epsilon^{abc} A_{bi} E_i^c = g\rho^a \quad (3.14)$$

na forma vetorial

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a = g\epsilon^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c + g\rho^a \quad (3.15)$$

multiplicando ambos os lados da equação (3.11) por  $\epsilon_{jpk}$ , obtemos, em termo das componentes de  $F_{ik}^a$ , o campo magnético  $\vec{B}$ , a seguinte expressão

$$\epsilon_{jpk} B^{aj} = -\frac{1}{2}\epsilon_{jpk}\epsilon^{jik} F_{ik}^a = -\frac{1}{2}(\delta_p^i \delta_q^k - \delta_p^k \delta_q^i) F_{ik}^a \Rightarrow -\epsilon_{jpk} B^{aj} = F_{pq}^a = F^{apq} \quad (3.16)$$

A segunda equação de Maxwell é obtida a partir da equação (3.7), ou seja,

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu j}^a &= -g\epsilon^{abc} A^{b\mu} F_{\mu j}^c + gJ_j^a \\ \partial^0 E_j^a + \partial^i F_{ij}^a &= -g\epsilon^{abc} A^{b0} E_j^c - g\epsilon^{abc} A^{bi} F_{ij}^c + gJ_j^a \\ \partial^0 E_j^a - \partial^i \epsilon_{lij} B^{al} &= -g\epsilon^{abc} A^{b0} E_j^c + g\epsilon^{abc} A^{bi} \epsilon_{lij} B^{cl} + gJ_j^a \end{aligned}$$

$$\partial^0 E_j^a + \epsilon_{jil} \partial^i B^{al} = -g\epsilon^{abc} A^{b0} E_j^c + g\epsilon^{abc} A^{bi} \epsilon_{jil} B^{cl} + gJ_j^a \quad (3.17)$$

na forma vetorial, temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}^a - \partial_t \vec{E}^a = g\vec{J}^a + g\epsilon^{abc} A_0^b \vec{E}^c - g\epsilon^{abc} \vec{A}^b \times \vec{B}^c \quad (3.18)$$

a partir das definições de (3.10) e (3.11), as outras duas equações de Maxwell são dadas por,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = -\frac{1}{2}g\epsilon^{abc} \nabla \cdot (\vec{A}^b \times \vec{A}^c) \quad (3.19)$$

e

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^a + \partial_t \vec{B}^a = -\frac{1}{2}g\epsilon^{abc} \partial_t (\vec{A}^b \times \vec{A}^c) + g\epsilon^{abc} [\vec{\nabla} \times (A_0^b \vec{A}^c)] \quad (3.20)$$

para o caso não -abeliano os campos de gauge, para SU(N), são transformados da seguinte maneira

$$A'_\mu(x) = U(x)(A_\mu - ig^{-1}\partial_\mu)U^{-1}(x) \quad (3.21)$$

onde  $U(x) = e^{-ig\xi^a t^a}$ , onde  $\xi^a$  são os parametros inifitesimais e  $t^a$  são os geradores do grupo. Para grupos que obedecem a algebra de Lie, como é o caso do SU(2) e SU(3), os geradores da transformação obedecem a relação de comutação

$$[t^a, t^b] = iC^{abc}t^c \quad (3.22)$$

$$Tr(t^a t^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \quad (3.23)$$

para o SU(2),

$$t^a = \frac{\sigma^a}{2}, \quad a = 1, 2, 3 \quad (3.24)$$

e para o SU(3)

$$t^a = \frac{\lambda^a}{2}, \quad a = 1, 2, \dots, 8 \quad (3.25)$$

onde  $\sigma^a$  e  $\lambda^a$  são as matrizes de Pauli e Gell-Mann, respectivamente.

As matrizes de Pauli possuem a seguinte forma:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Estão sujeitas a regra de comutação

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k \quad (3.27)$$

onde  $\varepsilon_{ijk}$  é o Símbolo de Levi-Civita.

# Capítulo 4

## Confinamento de Monopolo em Dimensões Extras

### 4.1 Dimensões Extras

A história das dimensões extras tem início com os trabalhos de Nordström [42], Theodor Kaluza [7] e Oskar Klein [8], no século XX. Essas teorias possuem uma grande profusão de novas motivações: unificação das interações gravitacionais, eletromagnéticas, fraca e forte via uma teoria de supergravidade em 11 dimensões [43] ou via teoria de supercordas em 10 dimensões [44]. Recentemente as dimensões extras foram apresentadas como uma possível solução para o problema da hierarquia. Como não são observadas no cotidiano, teorias de dimensões extras pressupõem a compactificação dessas dimensões em um raio muito pequeno da ordem do comprimento de Planck, i.e.  $\sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 10^{-33} m$ , onde  $\hbar$  é a constante de Planck,  $G$  é a constante gravitacional e  $c$  a velocidade da luz. O raio da dimensão extra podem adquirir valores bem maiores, até a ordem de 1mm. No caso desta última, as teorias representadas são: Arkani-Hamed, Dimopoulos e Dvali (ADD) [45], Randall e Sundrum (RS) [46] em 1998 e 1999, respectivamente. Nestes modelos, o universo é considerado como uma hipersuperfície chamada membrana, que reside numa maior dimensão do espaço-tempo de dimensão  $D = 4 + n$ , aqui 4 representa a dimensão do nosso mundo quadridimensional e  $n$  o número de dimensões espaciais adicionais. Uma característica de mundos brana é que a gravidade se propaga através do espaço tempo hiperdimensional, enquanto os demais estão localizados na

mesma. Por localização queremos dizer que as interações eletromagnéticas, fracas e fortes, bem como a matéria do nosso universo deve ser preso em uma superfície hiperdimensional. Gravidade só pode escapar desta superfície e se propagar através do volume de espaço-tempo da dimensão  $D$ , como mostrado na fig 4.1 A direção perpendicular representa a dimensão extra. A gravidade é o único que pode escapar e se espalhar por todo o volume (volume do espaço-tempo dimensão  $D$ ). Entre outras soluções propostas para este problema estão as teorias chamadas de cenários de branas-mundo (braneworld). Nesses cenários, a escala da gravidade – a escala de Planck – é reduzida. Dessa maneira, a escala de Planck observada é meramente um valor efetivo de uma escala fundamental, que pode ser tão pequena quanto a escala de unificação eletrofraca, em torno de 1 TeV [47]. Atualmente, a teoria mais viável para o estudo de dimensões extras é a teoria das cordas. Nessa teoria, os constituintes elementares da Natureza deixam de pontos (sem dimensão espacial) e passam a ser objetos com uma dimensão espacial (cordas). No final de 1990 Joe Polchinski [48] [49] e outros autores mostraram que as teorias de cordas também contêm objetos estendidos. Estes são chamados  $D_p$ , D-branas para Dirichlet, e  $p$  é o número de dimensões espaciais. Para um estudo mais detalhado sobre a teoria de cordas ver [50] [51]

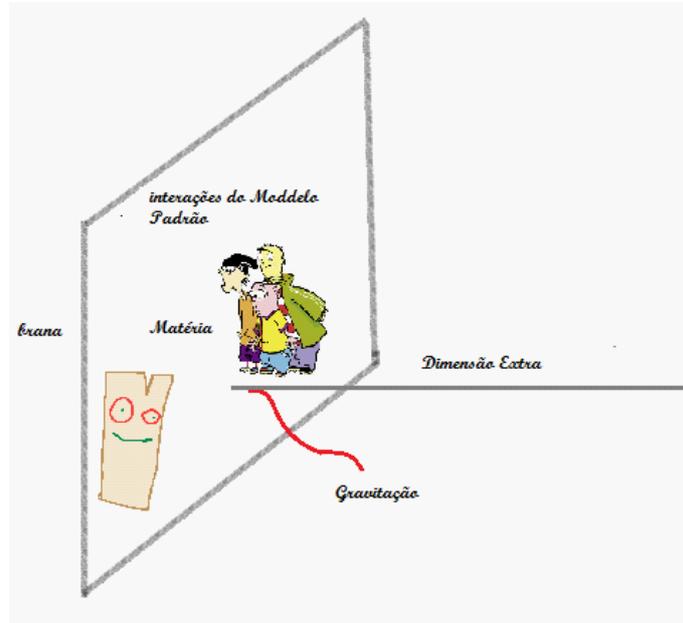


Fig4.1

## 4.2 Monopolo Confinado em 5D

Nesta seção iremos tratar de monopolos magnéticos, que surgem nas teorias de gauge de Yang-Mills-Higgs. Para esta dissertação, vamos considerar que esses monopolos estão imerso em uma hipersuperfície, também chamada de membrana, que está imersa em uma dimensão superior. Essa hipersuperfície contém a matéria e os campos quadrimensionais usuais em um estado de confinamento. Há diferentes abordagens para obter o confinamento, porém, para o nosso caso, o confinamento será dado por uma função "dielétrica"  $G(\phi)$  [52], cujo comportamento é governado por um campo escalar  $\phi(r)$ [61][62][63]

### 4.2.1 Modelo de Georgi-Glashow

Um exemplo de um modelo de unificação com soluções não triviais é o modelo Georgi-Glashow em 3 +1 dimensões. Este modelo, possui simetria local  $SU(2)$ ,

30CAPÍTULO 4. CONFINAMENTO DE MONOPOLO EM DIMENSÕES EXTRAS

onde o temos um trio de campos escalares  $\phi^a$  acoplados com campos de gauge  $A_\mu^a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , ambos transformado na representação adjunta do grupo. Por esta teoria, temos a Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}tr(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) + tr(D_\mu\phi D^\mu\phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \quad (4.1)$$

onde  $\phi$  e  $A_\mu$  podem ser escritos em termos da algebra do gerador de SU(2),

$$A_\mu = A_\mu^a T^a, \quad \phi = \phi^a T^a, \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a \quad (4.2)$$

$$D_\mu\phi = \partial_\mu\phi + ie[A_\mu, \phi] \quad (4.3)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu + ie[A_\mu, A_\nu] \quad (4.4)$$

onde os geradores da algebra de SU(2),  $T^a$ , obedecem a relação de comutação

$$[T^a, T^b] = i\varepsilon_{abc}T^c \quad (4.5)$$

as equações de movimento são obtidas variando a ação  $S = \int d^4x L$ , logo,

$$D_\mu F^{a\mu\nu} = -e\varepsilon_{abc}\phi^a D^\mu\phi^c \quad (4.6)$$

$$D_\mu D^\mu\phi^c = -\lambda\phi^a(\phi^b\phi^b - v^2) \quad (4.7)$$

o tensor energia-momento satisfaz  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , e é dada por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\alpha}^a F^{\alpha\nu} + D_\mu\phi^a D_\nu\phi^a - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}D_\alpha\phi^a D^\alpha\phi^a - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}^a F^{\alpha\beta} - g_{\mu\nu}\frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2) \quad (4.8)$$

Assim, a energia total do sistema é

$$\begin{aligned}
E &= \int d^3x T_{00} \\
E &= \int d^3x (F_{0\alpha}^a F^{a0\alpha} + D_0\phi^a D_0\phi^a + \frac{1}{2}D_\alpha\phi^a D^\alpha\phi^a + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta} + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)) \\
E &= \int d^3x (\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}^a F^{a\alpha\beta} + \frac{1}{2}D_\alpha\phi^a D^\alpha\phi^a + \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)) \\
E &= \int d^3x \frac{1}{2}(E_\mu^a E_\mu^a + B_\mu^a B_\mu^a + D_\alpha\phi^a D^\alpha\phi^a + \frac{\lambda}{2}(\phi^2 - v^2)) \tag{4.9}
\end{aligned}$$

onde fizemos uso da (3.10) e (3.11) que é a generalização não-abeliana dos campos eletromagnéticos de Maxwell.

Esta energia é mínima, se

$$\phi^a \phi^a = v^2$$

$$F_{\mu\nu}^a = 0 \tag{4.10}$$

$$D_\mu\phi^a = 0$$

O modelo de Georgi-Glashow permite soluções sólitônicas estáticas. Para ver isso, temos de encontrar soluções para as equações de campo (4.6),(4.7) sob as condições imposta em (4.10) assintoticamente, garantindo energia finita. Em teoria de gauge SU(2), existem monopolos magnéticos, como foi mostrado por 't Hooft [53],[54] e Polyakov [55]. Trata-se de configuração do campo, que obedecem as equações clássicas do movimento e, portanto, eles são mínimos da ação. Notavelmente, 't Hooft[53] e Polyakov [54], impôs como solução para a equação de campo, o ansatz

$$\phi^a = x^a F(r) \tag{4.11}$$

$$A_\mu^a(x) = \varepsilon_{abc} x^b W(r) \tag{4.12}$$

onde  $r^2 \equiv x^a x^a$ , e  $F(r)$  e  $W(r)$  são funções que se comportam assintoticamente, devido às condições de energia finita expressa em (4.10), como:

$$F(r) \rightarrow v \quad (4.13)$$

$$W(r) \rightarrow \frac{1}{gr} \quad (4.14)$$

A solução geral do ansatz (4.11) e (4.12) é conhecido como monopolo de 't Hooft - Polyakov.

### 4.2.2 Modelo de Estudo

Tem-se conhecimento que a condensação de monopolos magnéticos é responsável pelo confinamento em teorias de gauge não - abeliano [56]. Há muito que se argumentou que a condensação de monopolo poderia explicar o confinamento de cor através do efeito Meissner dual. O efeito Meissner é observado em todos os supercondutores. No entanto, a resposta magnética dos supercondutores leva à classificação destes sistemas em dois tipos: os supercondutores de tipo I e os supercondutores de tipo II. Como foi sugerido por 't Hooft [57] e Mandelstam [58], em meados de 1970, o vácuo da QCD pode se parecer com um supercondutor tipo II, tendo em vista a simetria de dualidade elétrico / magnético. Em vez de um condensado de partículas eletricamente carregadas, haveria um condensado de carga magnética, e monopolos magnéticos passam a ser invocados para preencher este papel. Em um supercondutor, cargas elétricas são condensados em pares de Cooper. O fluxo magnético não pode penetrar o material, as correntes elétricas persistentes vai combater qualquer fluxo magnético aplicado a partir do exterior. Nos supercondutores do tipo II, no entanto, o fluxo magnético pode penetrar, o que pode acontecer apenas por meio da formação de tubos de fluxo de Abrikosov [59], que transportam apenas uma determinada quantidade fixa de fluxo magnético. Vórtices Abrikosov são tubos de fluxo magnético, e, em princípio, um tubo de tal fluxo poderia começar em um monopolo, e termina em um antimonopolo. Na formulação de 't Hooft o modelo supercondutor dual é produzido no âmbito da projeção abeliana [56].

Nosso ponto de partida para o confinamento do monopolo magnético é através da ação, em 5D. Como se sabe, o confinamento no modelo de Georgi-Glashow, está previsto para ser totalmente não abeliano e, assim, possui semelhança com QCD. Em [60] Polyakov demonstra que os monopolos magnéticos são responsáveis por

confinamento em QED compacta em  $D = 3$  dimensões e em [61] mostra a relação entre monopolo magnético e dimensões extras compactadas.

Seguindo 't Hooft [53] e Polyakov[55], iniciamos a elaboração de uma solução para a função  $G(\phi)$  com o objetivo de proporcionar o confinamento.

Primeiramente, tomando a brana localizada no ponto fixo  $k'$ , a ação desta configuração em 5D será dada por

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k-k') dk \int d^4x \sqrt{\bar{g}^{(5)}} \left\{ -\frac{1}{4} \bar{g}^{\mu\alpha} \bar{g}^{\nu\beta} G(\phi) F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} D_\mu \phi^a D_\nu \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - v^2)^2 \right\} \quad (4.15)$$

onde  $k$  é a coordenada da dimensão extra. Precisamos encontrar a métrica para este cenário. Se queremos descrever o nosso mundo, precisamos que a métrica preserve a invariância de Poincaré, i.e, o universo em 4D desta teoria precisa ser plano e estático (a brana não está se movendo). Utilizamos o seguinte Ansatz para a métrica

$$ds^2 = e^{2A(k)} (dt^2 - \sum dx_i^2) - dk^2 \quad (4.16)$$

ou

$$ds^2 = e^{2A(k)} dt^2 - e^{2A(k)} d\sigma^2 - dk^2 \quad (4.17)$$

onde  $d\sigma^2$  é a distribuição espacial (isotrópico e homogêneo), dada por

$$d\sigma^2 = d\rho^2 - \rho(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.18)$$

A forma funcional de  $A(r)$  depende do modelo utilizado. Onde  $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^\mu, k')$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2A(k)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2A(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{2A(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{2A(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

logo,

$$\sqrt{\tilde{g}^{(5)}} = e^{4A} \quad (4.20)$$

desta forma, a equação (4.15) fica, apos a integração em  $k$

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4}G(\phi)F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a + \frac{1}{2}e^{2A}D_\mu\phi^a D_\nu\phi^a - \frac{\lambda}{4}e^{4A}(\phi^a\phi^a - v^2)^2 \right\} \quad (4.21)$$

com  $F_{\mu\nu}^a$  e  $D_\mu$  dados por:

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.22)$$

$$D_\mu\phi^a \equiv \partial_\mu\phi^a - g\epsilon^{abc}A_\mu^b\phi^c \quad (4.23)$$

reescalamos  $\phi^a$  e  $A_\mu^a$ , em termos do fator  $e^{-A}$

$$\phi^a \rightarrow e^{-A}\phi^a \quad (4.24)$$

$$A_\mu^a \rightarrow e^{2A}A_\mu^a \quad (4.25)$$

Substituindo em  $F_{\mu\nu}^a$  e  $D_\mu\phi^a$ , obtemos:

$$D_\mu\phi^a \equiv e^{-A}\widehat{D}_\mu\phi^a \quad (4.26)$$

onde o operador derivada covariante passa a ser definido como

$$\widehat{D}_\mu \equiv \partial_\mu - \widehat{g}\epsilon^{abc}A_\mu^b \quad (4.27)$$

com  $\widehat{g}$  dado por

$$\widehat{g} = g e^{2A} \quad (4.28)$$

desenvolvendo o termo  $e^{2A}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a$ , obtemos

$$e^{2A}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a = \widehat{D}_\mu\phi^a \widehat{D}^\mu\phi^a \quad (4.29)$$

para  $F_{\mu\nu}^a$ , encontramos

$$F_{\mu\nu}^a \equiv e^{2A} \widehat{F}_{\mu\nu}^a \quad (4.30)$$

onde

$$\widehat{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + \widehat{g} \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.31)$$

logo

$$F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} = e^{4A} \widehat{F}_{\mu\nu}^a \widehat{F}^{a\mu\nu} \quad (4.32)$$

trabalhando agora com o termo  $e^{4A}(\phi^a \phi^a - v^2)^2$ , obtemos

$$e^{4A}(\phi^a \phi^a - v^2)^2 = (\phi^a \phi^a - \widehat{v}^2)^2 \quad (4.33)$$

substituindo (4.29) (4.32) e (4.33) em (4.21), temos

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} \widehat{G}(\phi, A) \widehat{F}_{\mu\nu}^a \widehat{F}^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \widehat{D}_\mu \phi^a \widehat{D}^\mu \phi^a - \frac{\lambda}{8} (\phi^a \phi^a - \widehat{v}^2)^2 \right\} \quad (4.34)$$

onde a densidade lagrangeana será

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \widehat{G}(\phi, A) \widehat{F}_{\mu\nu}^a \widehat{F}^{a\mu\nu} + \frac{1}{2} \widehat{D}_\mu \phi^a \widehat{D}^\mu \phi^a - \frac{\lambda}{8} (\phi^a \phi^a - \widehat{v}^2)^2 \quad (4.35)$$

e  $\widehat{G}(\phi, A)$  será dado por

$$\widehat{G}(\phi, A) = e^{4A(k)} G(\phi(\rho, k')) \quad (4.36)$$

comparando a equação (4.35) com a equação (4.21), temos que a função que gera o confinamento passa a depender do termo  $A(k')$ .

A partir de agora, procuramos as equações de movimentos da equação (4.35). Para isso, vamos variar a equação (4.34) em relação a  $A_\mu^a$  e a  $\phi^a$ .

Em relação a  $A_\mu^a$ , temos

$$\delta S_{A_\mu^a} = \delta S_1 + \delta S_2 = 0 \quad (4.37)$$

onde  $\delta S_1$

$$\delta S_1 = \int d^4x (-\widehat{G} \frac{1}{2} \delta \widehat{F}_{\mu\nu}^a) \widehat{F}^{a\mu\nu} \quad (4.38)$$

calculando  $\delta \widehat{F}_{\mu\nu}^a$

$$\delta \widehat{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \delta A_\nu^a - \partial_\nu \delta A_\mu^a + \widehat{g} \epsilon^{abc} \delta A_\mu^b A_\nu^c + \widehat{g} \epsilon^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c \quad (4.39)$$

$$\delta \widehat{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu \delta A_\nu^a + \widehat{g} \epsilon^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c - \partial_\nu \delta A_\mu^a + \widehat{g} \epsilon^{abc} \delta A_\mu^b A_\nu^c \quad (4.40)$$

pela simetria de  $F_{\mu\nu}^a$ , ou seja

$$F_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a - F_{\nu\mu}^a) \quad (4.41)$$

logo,

$$\delta \widehat{F}_{\mu\nu}^a = 2(\partial_\mu \delta A_\nu^a + \widehat{g} \epsilon^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c) \quad (4.42)$$

assim, substituindo em  $\delta S_1$ , obtemos

$$\delta S_1 = \int d^4x (-\widehat{G} (\partial_\mu \delta A_\nu^a + \widehat{g} \epsilon^{abc} A_\mu^b \delta A_\nu^c)) \widehat{F}^{a\mu\nu} = 0 \quad (4.43)$$

integrando por partes o termo  $\partial_\mu \delta A_\nu^a \widehat{F}^{a\mu\nu}$

$$\partial_\mu \delta A_\nu^a \widehat{F}^{a\mu\nu} = \widehat{F}^{a\mu\nu} \delta A_\nu^a - \delta A_\nu^a \partial_\mu \widehat{F}^{a\mu\nu} \quad (4.44)$$

substituindo (4.44) em (4.43), e agrupando os termos, encontramos

$$\widehat{D}_\mu (\widehat{G}(\phi, A) \widehat{F}_{\mu\nu}^a) = 0 \quad (4.45)$$

onde  $\mu, 0, 1, 2, 3$  e  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . Usando a definição (4.27), vamos calcular o termo  $\delta S_2$ , ou seja

$$\delta S_2 = \int d^4x [(\widehat{D}^\mu \phi^a) \widehat{g} \epsilon^{abc} \delta A_\mu^b \phi^c] \quad (4.46)$$

fazendo a troca do índice  $a$  por  $b$ , temos

$$\delta S_2 = \int d^4x [(\widehat{D}^\mu \phi^b) \widehat{g} \epsilon^{bac} \delta A_\mu^a \phi^c] \quad (4.47)$$

usando a antisimetria de  $\epsilon^{abc}$  (Ver apêndice A), obtemos

$$\delta S_2 = \int d^4x [-\widehat{g} \epsilon^{abc} (\widehat{D}^\mu \phi^b) \phi^c] \delta A_\mu^a \quad (4.48)$$

assim, substituindo (4.45) e a (4.48) na equação (4.43), encontramos

$$\widehat{D}_\mu (\widehat{G}(\phi^a, A) \widehat{F}_{\mu\nu}^a) = \widehat{g} \epsilon^{abc} (\widehat{D}^\mu \phi^b) \phi^c \quad (4.49)$$

agora, variando a equação (4.34) em relação a  $\phi^a$ , obtemos

$$\widehat{D}_\mu (\widehat{D}^\mu \phi^a) + \lambda (\phi^b \phi^b - \widehat{v}^2) \phi^a + \frac{1}{4} \frac{\partial \widehat{G}(\phi, A)}{\partial \phi^a} \widehat{F}_{\mu\nu}^a \widehat{F}^{a\mu\nu} = 0 \quad (4.50)$$

Tendo em vista a simetria do problema, vamos procurar soluções que seja independente do tempo e esfericamente simétricas. Para isso, vamos utilizar o ansatz de 't Hooft e Polyakov, dados por

$$\phi_a = r_a Q(\rho) \quad (4.51)$$

$$A_i^a = \varepsilon_{iab} r_b W(\rho) \quad (4.52)$$

onde  $r_a^2 = \rho^2$ . Assim, temos que

$$\widehat{D}_i \phi_a = \partial_i (r_a Q) + \widehat{g} \epsilon_{abc} \epsilon^{ibl} r_l W \quad (4.53)$$

logo, obtemos

$$\widehat{D}_i \phi_a = Q \delta_i^a + r_a \partial_i (Q) + \widehat{g} \delta_i^a \rho^2 W - \widehat{g} r_a r_i Q \quad (4.54)$$

após longas contas, temos

$$(\widehat{D}_i \phi^a)(\widehat{D}_i \phi^a) = 3Q^2 + 2Q r_i (\partial_i Q) + 4\widehat{g} \rho^2 W Q^2 + \rho^2 (\partial_i Q)(\partial^i Q) + 2\widehat{g} \rho^4 W^2 Q^2 \quad (4.55)$$

e para  $\widehat{F}_{\mu\nu}^a$ , temos

$$\widehat{F}_{ij}^a = \partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + \widehat{g}\epsilon^{abc} A_i^b A_j^c \quad (4.56)$$

usando (4.52) em (4.56) e manipulando separadamente cada termo, ou seja

$$\partial_i A_j^a = \partial_i(\epsilon_{jak} r_k W) = \epsilon_{ijk} \partial_i r_k W + \epsilon_{ijk} r_k \partial_i W \quad (4.57)$$

$$\partial_i A_j^a = \epsilon_{jak} \delta_i^k W + \epsilon_{jak} r_k \partial_i W \quad (4.58)$$

da mesma forma para  $\partial_j A_i^a$ ,

$$\partial_j A_i^a = \epsilon_{iam} \partial_j r_m W + \epsilon_{iam} r_m \partial_j W \quad (4.59)$$

subtraindo (4.58) e (4.59), obtemos

$$\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a = 2\epsilon_{ija} W + \epsilon_{jak} r_k \partial_i W - \epsilon_{iam} r_m \partial_j W \quad (4.60)$$

para o produto  $\widehat{g}\epsilon^{abc} A_i^b A_j^c$ , temos

$$\widehat{g}\epsilon^{abc} A_i^b A_j^c = \widehat{g}\epsilon_{ija} r_a r_n W^2 \quad (4.61)$$

substituindo (4.60) e (4.61) na (4.56), encontramos

$$\widehat{F}_{ij}^a = 2\epsilon_{ija} W + \epsilon_{jak} r_k \partial_i W - \epsilon_{iam} r_m \partial_j W + \widehat{g}\epsilon_{ija} r_a r_n W^2 \quad (4.62)$$

assim, o após longas contas, produto  $\widehat{F}_{ij}^a \widehat{F}^{aij}$ , será dado por

$$\widehat{F}_{ij}^a \widehat{F}^{aij} = 24W^2 + 16r_i W(\partial^i W) + 8\widehat{g}^2 \rho^2 W^3 + 2\widehat{g}^2 \rho^4 W^4 + 4\rho^2 (\partial^i W)(\partial_i W) \quad (4.63)$$

dessa forma, substituindo as equações (4.51) (4.55) e (4.63) na equação (4.35)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}\widehat{G}\{24W^2 + 16r_i W(\partial^i W) + 8\widehat{g}^2 \rho^2 W^3 + 2\widehat{g}\rho^4 W^4 \\ & + 4\rho^2 (\partial^i W)(\partial_i W)\} + \frac{1}{2}\{3Q^2 + 2Qr_i(\partial_i Q) + 4\widehat{g}\rho^2 WQ^2 \\ & + \rho^2 (\partial_i Q)(\partial^i Q) + 2\widehat{g}\rho^4 W^2 Q^2\} - \frac{\lambda}{8}(\rho^2 Q^2 - \widehat{v}^2)^2 \end{aligned} \quad (4.64)$$

como  $L = \int \mathcal{L} d^3x$ , obtemos

$$\begin{aligned}
L = \int_0^\infty 4\pi\rho^2 \{ & -\widehat{G}[\rho^2 W'^2 + 4\rho W W' + 6W^2 + 2\widehat{g}^2 \rho^2 W^3 \\ & + \frac{3}{2}\widehat{g}\rho^4 W^4] + \frac{1}{2}\rho^2 Q'^2 + \rho Q Q' + \frac{3}{2}Q^2 + 2\widehat{g}\rho^2 Q^2 W \\ & - \widehat{g}^2 \rho^4 Q^2 W^2 - \frac{\lambda}{8}\rho^4 Q^4 + \frac{\lambda}{4}\rho^2 Q^2 \widehat{v}^2 - \frac{\lambda}{8}\widehat{v}^4 \} \quad (4.65)
\end{aligned}$$

usando a equação de Euler-Lagrange na equação (4.65), e após longas contas, encontramos

$$\begin{aligned}
\partial_\rho [2\widehat{G}\rho^4 W' + 4\widehat{G}\rho^3 W] = & 4\widehat{G}\rho^3 W' + 12\widehat{G}\rho^2 W + 6\widehat{G}\widehat{g}\rho^4 W^2 \\ & + 2\widehat{G}\widehat{g}\rho^6 W^3 - 2\widehat{g}\rho^4 Q^2 - 2\widehat{g}\rho^6 W Q^2 \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Desde que a busca de uma solução exata para a equação (4.66) é bastante complicada, algum tipo de estratégia é necessária. O que se pode fazer é procurar soluções assintóticas que estejam de acordo com as condições de contorno do problema. Como discutimos na equação (4.10), a exigência finita de energia obriga os campos a estar no vácuo Higgs assintoticamente a grandes distâncias. Procuramos fazer esta expectativa utilizando um ansatz simplificado para os campos  $Q$  e  $W$ , deixando as condições de contorno satisfeitas de uma forma topologicamente trivial, ou seja, insistiremos em ter  $\phi^a \phi^a \rightarrow \widehat{v}$ , no limite quando  $\rho \rightarrow \infty$ . Ele foi originalmente feita por 't Hooft(1974) e Polyakov(1974). Portanto, a fim de que no infinito, ou seja, fora do monopolo magnético, se recupere o valor de vácuo da teoria, deve-se impor, para  $\rho \rightarrow \infty$ , que

$$Q \rightarrow \frac{\widehat{v}}{\rho} \quad (4.67)$$

$$W \rightarrow \xi \rho^{-n} \quad (4.68)$$

onde  $\xi$  é uma constante. Substituindo as equações (4.67) e (4.68) na equação (4.66), obtemos

$$\begin{aligned}
 (4-2n)(\partial_\rho \widehat{G})\xi r^{2-n} + (4-2n)\xi \widehat{G}\rho^{2-n} &= -4\widehat{G}n\xi\rho^{2-n} + 12\widehat{G}\xi\rho^{2-n} \quad (4.69) \\
 &+ 6\widehat{G}\widehat{g}\xi^2\rho^{4-2n} + 2\widehat{G}\widehat{g}^2\xi^3\rho^{6-3n} \\
 &- 2\widehat{g}v^2\rho^2 - 2\widehat{g}^2\xi\rho^{4-n}
 \end{aligned}$$

Observe que para  $n = 2$  [53], temos  $\xi = \frac{1}{\widehat{g}}$ , desta forma ,

$$\phi_a \rightarrow e^{2A} v \frac{r_a}{\rho} \quad (4.70)$$

$$A_\mu^a \rightarrow -\epsilon_{abc} \frac{r_b}{e^{2A}\rho^2} \quad (4.71)$$

observando a equação (4.69), vemos que para  $\widehat{G} = 1$ , implica que  $G(\phi, k) = \frac{1}{e^{4A}}$ , de tal forma que recuperamos a equação de 't hooft [53].

Como estamos interessado em uma função  $G(\phi)$  que gere o confinamento do monopolo magnético, ela deve ser escolhido adequadamente de modo que no limite assintótico recuperemos o termo dado por t'Hooft, i.e,

$$\phi \approx \frac{1}{\rho} \quad (4.72)$$

Em geral, o comportamento da função  $G(\phi)$  com respeito a  $\rho$ , pode ser governada por algum campo escalar no qual descreve a dinâmica do monopolo magnético. Desta forma, vamos utilizar o seguinte Ansatz

$$G(\phi) = \lambda\phi^2 \quad (4.73)$$

de forma que a dependência funcional de  $\phi$  com respeito a  $\rho$

$$\lambda\phi^2 = \frac{1}{a\rho^2 + \rho_0^2} \rightarrow \phi = \frac{\lambda^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a\rho^2 + \rho_0^2}} \quad (4.74)$$

obtendo assim,

$$\widehat{G}(\phi, A) = \frac{e^{4A}\lambda}{a\rho^2 + \rho_0^2} \quad (4.75)$$

Graficamente,

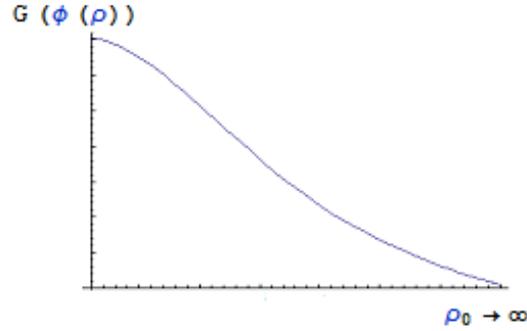


Fig.4.2

Note que para o comportamento assintótico, ou seja, para  $\rho \rightarrow \infty$  temos que  $\widehat{G} \rightarrow 0$  e para  $\rho \rightarrow 0$ , a função  $\widehat{G} \rightarrow \rho_0$ , como esperado para fornecer confinamento. Usando a equação (4.75) na equação (4.45), obtemos um campo magnético constante, o que implica que as linhas estão juntas ( $A_0^a = 0$ ), caracterizando um regime de confinamento

$$B^a = \frac{\widehat{g}}{4\pi\epsilon_0\rho^2\widehat{G}} \quad (4.76)$$

A equação (4.76) nos fornece um potencial dado por

$$U = \alpha\rho + C \quad (4.77)$$

desta forma os monopolos estão vinculados por um potencial linear, que é do tipo confinante.

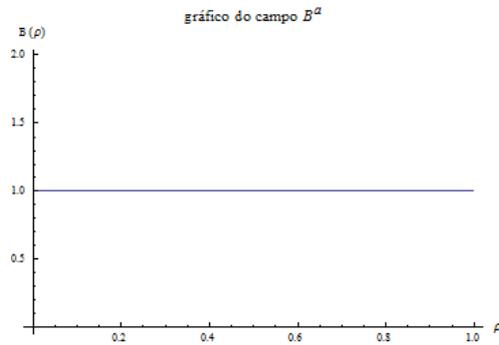


Fig. 4.3

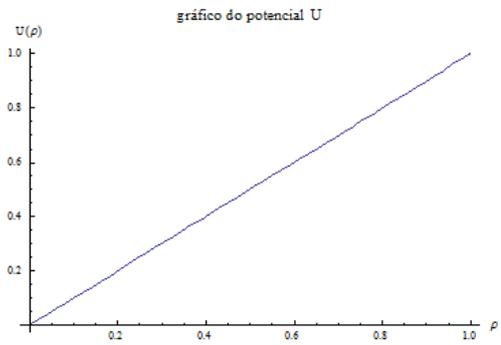


Fig.4.4

Para entender o confinamento, imaginemos duas cargas magnéticas no interior do supercondutor tipo II. A presença de campos magnéticos aumenta a energia do sistema. Como consequência, o supercondutor tende a expulsar o campo magnético do seu interior a fim de minimizar sua energia. No entanto, o campo magnético não pode ser completamente expulso do material, caso contrário haveria violação da lei de Gauss. Sendo assim, a configuração do campo magnético deve ser tal que minimiza a energia. Devido ao efeito Meissner dual, as linhas de campo ficam confinadas em um tubo de fluxo, conhecido como vórtice de Abrikosov, ligando as cargas. Como a densidade de energia é constante ao longo de um vórtice Abrikosov, então implica um potencial linear entre o monopolo e antimonopole e como consequência, as mesmas se encontram confinadas. Portanto, se havia monopolos magnéticos e anti-monopoles presentes em um material deste tipo, poderíamos observar esses objetos confinados, ver fig. 4.5

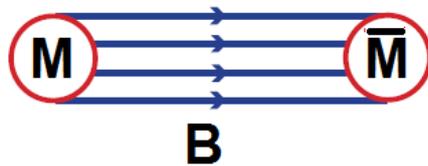


Fig.4.5

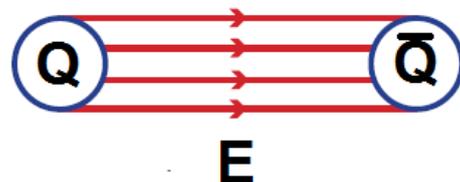


Fig.4.6

Este confinamento magnético no supercondutor tipo II é justamente um análogo magnético e em baixas energias do confinamento cromoeletrico em QCD, tendo em vista a simetria de dualidade elétrico/ magnético [56][60].

# Capítulo 5

## Conclusão

O monopolo magnético quebra o paradigma de um mundo perfeito e sem singularidades, mostrando características interessantes as quais não foram comprovadas experimentalmente, mas que também não podem ser excluídas. Até hoje ninguém nunca observou um monopolo magnético. No entanto, existem muitas dificuldades em tal observação, uma vez que em todos os modelos de unificação, onde as propriedades do monopolo podem ser calculados, estimar uma massa da ordem de  $10^{16}$  GeV. No entanto, o cenário cosmológico padrão prevê que monopolos foram criadas nos estágios iniciais do nosso universo e, portanto, devemos esperar um fluxo pequeno, mas existente de monopolos magnéticos.

Vimos que se levarmos em conta a quantização de Dirac, que provém de um argumento baseado na Mecânica Quântica, então temos uma explicação natural para a origem da quantização da carga elétrica. Vimos também que as condições de finitude de energia levaram à divisão das possíveis configurações dos campos em setores independentes caracterizados por uma carga topológica. Porém, não obtivemos ainda nenhuma solução explícita. Para contornar tal problema, 't Hooft e Polyakov tomaram um ansatz em que funções  $F$  e  $W$  devem se comportar, assintoticamente, devido às condições do problema.

Sambemos que o confinamento na QCD implica que não há quark livre para ser encontrados na natureza. Na QCD, os quarks têm (cor-) carga elétrica ao invés de carga magnética. Neste trabalho, encontramos uma função que nos forneceu um sistema que comprime os campos magnéticos para dentro de tubos de fluxo. Como consequência, vimos que esta configuração apresentou um potencial linear em re-

lação à distância entre par de monopolo magnético separados. De fato, se alguém assume o confinamento de monopolo, pode-se argumentar que o efeito Meissner garante o confinamento, visto que em um supercondutor haveria um potencial assintoticamente linear entre cargas magnéticas (monopolos), ou seja, confinamento de cargas magnéticas.

**Parte I**  
**Apêndice A**

Tendo em vista que a álgebra  $\mathfrak{su}(2)$  apareceu em nosso estudo, convém-nos elaborar alguns aspectos do grupo especial unitário  $SU(2)$ . Esse grupo está associado à simetria de Spin isotrópico em Física Nuclear e também ao spin em Mecânica Quântica.

Para o caso do grupo  $SU(N)$ , prova-se que o número de geradores é  $N^2 - 1$ . Para o  $SU(2)$ , temos  $2^2 - 1 = 3$  geradores. Dada as restrições adicionais para que o gerador seja diagonal, dos  $N^2 - 1$  geradores do  $SU(N)$ , apenas  $N - 1$  são diagonais.

As constantes de estrutura do grupo são definidas por

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (\text{A.1})$$

como  $[T^b, T^a] = -[T^a, T^b]$ , temos que

$$if^{bac}T^c = -if^{abc}T^c \Rightarrow f^{abc} = -f^{bac} \quad (\text{A.2})$$

tomando o traço de  $([T^a, T^b]T^c)$ ,

$$\begin{aligned} \text{tr}([T^b, T^a]T^c) &= \text{tr}(T^aT^bT^c - T^bT^aT^c) \\ &= \text{tr}(T^cT^aT^b - T^aT^cT^b) \\ &= \text{tr}([T^c, T^a]T^b) = -\text{tr}([T^a, T^c]T^b) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$= \text{tr}(T^bT^cT^a - T^cT^bT^a) = -\text{tr}([T^c, T^b]T^a) \quad (\text{A.4})$$

pela definição em A.1, temos que

$$\text{tr}([T^a, T^b]T^m) = if^{abc}\text{tr}(T^cT^m) = if^{abc}t(R)\delta^{cm} \quad (\text{A.5})$$

usando a condição de normalização. Assim,

$$\text{tr}([T^a, T^b]T^c) = if^{abc}t(R) \quad (\text{A.6})$$

usando A.3, temos

$$if^{abc}t(R) = -if^{abc}([T^a, T^c]T^b)$$

$$\Rightarrow i f^{abc} t(R) = -i f^{acb} t(R) \Rightarrow f^{abc} = -i f^{acb} \quad (\text{A.7})$$

usando A.4, temos

$$i f^{abc} t(R) = -i f^{cba} t(R) \Rightarrow f^{abc} = -i f^{cba} \quad (\text{A.8})$$

assim,

$$f^{abc} = -i f^{acb} = -f^{cba} = -i f^{bac} \quad (\text{A.9})$$

e portanto,  $f^{abc}$  é um tensor completamente antisimétrico.

Para definir a representação adjunta, comecemos por escrever a identidade de Jacob:

$$[T^a[T^b, T^c]] + [T^b[T^c, T^a]] + [T^c[T^a, T^b]] = 0 \quad (\text{A.10})$$

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0$$

$$-f^{abd} f^{dce} + f^{acd} f^{dbe} = -f^{bcd} f^{ade}$$

$$i f^{abd} i f^{dce} - i f^{acd} i f^{dbe} = i f^{bcd} i f^{ade} \quad (\text{A.11})$$

definindo agora  $(\tilde{T}^b)_{ac} = i f^{abc}$ , então

$$(\tilde{T}^b)_{ad} (\tilde{T}^c)_{de} - (\tilde{T}^c)_{ad} (\tilde{T}^b)_{de} = i f^{bcd} (\tilde{T}^d)_{ae}$$

$$\Rightarrow ([\tilde{T}^b, \tilde{T}^c])_{ae} = i f^{bcd} (\tilde{T}^d)_{ae} \quad (\text{A.12})$$

Os objetos  $(\tilde{T}^b)_{ac} = i f^{abc}$  comportam-se da mesma forma que os geradores do grupo, e formam portanto uma representação do grupo, a que se chama representação adjunta.

**Parte II**  
**Apêndice B**

As fórmulas podem ser escritas de forma compacta em termos do delta de Kronecker,  $\delta_{ij}$  e do símbolo de permutação  $\varepsilon_{ijk}$ . Estas quantidades são definidas como

$$\begin{cases} \delta_{ij} = +1 & \text{se } i = j \\ \delta_{ij} = 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{ijk} = +1 & \text{se } ijk = 123, 231 \text{ ou } 312 \\ \varepsilon_{ijk} = -1 & \text{se } ijk = 321, 213 \text{ ou } 132 \\ \varepsilon_{ijk} = 0 & \text{se } ijk = \text{se quaisquer dois} \\ & \text{índices forem iguais} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Várias relações envolvendo  $\delta_{ij}$  e  $\varepsilon_{ijk}$  são úteis para manipular ou demonstrar identidades vetoriais ou tensoriais, entre elas:

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{hjk} = 2\delta_{ih} \quad (\text{B.3})$$

$$\sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mnk} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm} \quad (\text{B.4})$$

### I - Vetores unitários

Considere  $\delta_1, \delta_2$  e  $\delta_3$  três vetores unitários. A definição de produto escalar e vetorial pode-se ser sumarizadas em duas relações:

$$(\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) = \delta_{ij} \quad (\text{B.5})$$

$$(\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{\delta}_i \quad (\text{B.6})$$

para operações vetoriais e tensoriais, tudo que será feito será decompor os vetores ou tensores através dos vetores unitários e aplicar as equações acima. Assim

$$\vec{v} = \vec{\delta}_1 v_1 + \vec{\delta}_2 v_2 + \vec{\delta}_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 \vec{\delta}_i v_i \quad (\text{B.7})$$

$$v + w = \sum_i \delta_i v_i + \sum_i \delta_i w_i = \sum_i \delta_i (v_i + w_i) \quad (\text{B.8})$$

II- O produto escalar entre dois vetores:

$$\begin{aligned} (\vec{v} \cdot \vec{w}) &= \left( \left\{ \sum_i \vec{\delta}_i v_i \right\} \cdot \left\{ \sum_j \vec{\delta}_j w_j \right\} \right) = \sum_i \sum_j (\vec{\delta}_i \cdot \vec{\delta}_j) v_i w_j \\ &= \sum_i \sum_j \delta_{ij} v_i w_j = \sum_i v_i w_i \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

III-O produto vetorial entre dois vetores

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times \vec{w}) &= \left[ \left\{ \sum_j \vec{\delta}_j v_j \right\} \times \left\{ \sum_k \vec{\delta}_k w_k \right\} \right] \\ &= \sum_j \sum_k (\vec{\delta}_j \times \vec{\delta}_k) v_j w_k \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \vec{\delta}_i v_j w_k \\ &= \det \begin{vmatrix} \nabla \delta_i & \nabla \delta_j & \nabla \delta_k \\ v_i & v_j & v_k \\ w_i & w_j & w_k \end{vmatrix} \\ &= (v_2 w_3 - v_3 w_2) \vec{\delta}_1 + (v_3 w_1 - v_1 w_3) \vec{\delta}_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) \vec{\delta}_3 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Note que a componente na direção  $i$  de  $(\vec{v} \times \vec{w})$  é dada por:

$$(\vec{v} \times \vec{w})_i = \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} v_j w_k \quad (\text{B.11})$$

IV- O gradiente de um Campo Escalar:

Se  $\phi$  é uma função escalar das variáveis  $x_1, x_2, x_3$  então a operação de  $\nabla$  em  $\phi$  é dada por

$$\vec{\nabla}\phi = \bar{\delta}_1 \frac{\partial\phi}{\partial x_1} + \bar{\delta}_2 \frac{\partial\phi}{\partial x_2} + \bar{\delta}_3 \frac{\partial\phi}{\partial x_3} = \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \quad (\text{B.12})$$

V- Divergência de um campo vetorial:

Se  $\vec{v}$  o vetor é uma função das variáveis  $x_1, x_2, x_3$  então o produto escalar de  $\vec{v}$  com  $\nabla$  é:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= \left( \left\{ \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j v_j \right\} \right) = \sum_i \sum_j (\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j) \frac{\partial}{\partial x_j} v_j \\ &= \sum_i \sum_j (\delta_{ij}) \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

VI-O rotacional de um Campo Vetorial

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \left[ \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \times \left\{ \sum_k \bar{\delta}_k \vec{v}_k \right\} \right] \\ &= \sum_j \sum_k (\bar{\delta}_j \times \bar{\delta}_k) \frac{\partial}{\partial x_j} \vec{v}_k = \sum_i \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \bar{\delta}_i \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial x_j} \\ &= \det \begin{vmatrix} \bar{\delta}_1 & \bar{\delta}_2 & \bar{\delta}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \end{vmatrix} \\ &= \bar{\delta}_1 \left\{ \frac{\partial \vec{v}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial x_3} \right\} + \bar{\delta}_2 \left\{ \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \vec{v}_3}{\partial x_1} \right\} + \bar{\delta}_3 \left\{ \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial x_2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

a componente i de  $\nabla \times \vec{v}$  é dada por

$$\nabla \times \vec{v} = \sum_j \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial x_j} \quad (\text{B.15})$$

Deve-se destacar duas identidades relacionadas com rotacional, divergente e gradiente que são identicamente nulas

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{grad } \phi) &= (\nabla \times \nabla \phi)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \equiv 0 \\ \text{div}(\text{rot } \vec{v}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} \equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

VII-Gradiente de um Campo Vetorial

$$\nabla \vec{v} = \left\{ \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j \vec{v}_j \right\} = \sum_i \sum_j \bar{\delta}_i \bar{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{v}_j \quad (\text{B.17})$$

VIII- Divergência de um Campo Tensorial

O produto vetorial entre um tensor  $\tau$  e o operador  $\nabla$  é definido por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tau &= \left[ \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \sum_k \delta_j \delta_k \tau_{jk} \right\} \right] = \sum_i \sum_j \sum_k \bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j \bar{\delta}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{jk} \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \delta_{ij} \bar{\delta}_k \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \sum_k \bar{\delta}_k \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ik} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

A componente k de  $\nabla \cdot \tau$  é dada por

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_{ik} \quad (\text{B.19})$$

IX- Laplaciano de um Campo Escalar

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \nabla \phi &= \left( \left\{ \sum_i \bar{\delta}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \right) \\
&= \sum_i \sum_j \bar{\delta}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2}
\end{aligned} \tag{B.20}$$

X- Laplaciano de um Campo Vetorial

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot \nabla \vec{v}] &= \left[ \left\{ \sum_j \bar{\delta}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right\} \cdot \left\{ \sum_i \sum_k \bar{\delta}_i \bar{\delta}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{v}_k \right\} \right] \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_i \cdot \bar{\delta}_j \bar{\delta}_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \\
&= \sum_i \sum_j \sum_k [\bar{\delta}_{ij} \bar{\delta}_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} v_k \\
&= \sum_k \bar{\delta}_k \left( \sum_i \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

# Referências Bibliográficas

- [1] (B. Baigrie, *Electricity and Magnetism - A Historical Perspective* Greenwood Press, 2007)
- [2] G.L. Verschuur, *Hidden Attraction - The Mystery and History of Magnetism* Oxford University Press, 1996.)
- [3] <http://www.cbpf.br/~labmag/apg.pdf>)
- [4] Salam, A.; Heisenberg, W.; Dirac, P.A.M. *A unificação das forças fundamentais: o grande desafio da física contemporânea / tradução Maria Luiza X. de A. Borges; revisão técnica, Ildeu de Castro Moreira, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editores, 1993).*
- [5] M. Faraday, *Experimental Researches in Electricity*, vol III Taylor and Francis, 1855.
- [6] J.C. Maxwell, *A dynamical theory of the electromagnetic field*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. 155(1865)
- [7] T. Kaluza, “On the Problem of Unity in Physics”, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys. )* 33 (1921) 966–972.
- [8] O. Klein, “Quantum theory and five-dimensional theory of relativity”, *Z. Phys.* 37 (1926) 895–906, doi:10.1007/BF01397481.
- [9] *An introduction to Kaluza-Klein theories*, proc. Chalk River workshop on Kaluza-Klein theories, ed. H. C. Lee (World Scientific, Singapore, 1984)
- [10] Jackson, J.D.; *Classical Electrodynamics*. Third Edition, Wiley Publishing, New York (1999);

- [11] P.A.M. Dirac, Proc. R. Soc. A 133,60 (1931).
- [12] N. Cabibbo e E. Ferrari, Il Nuovo Cim. 23(NEGRITO), 1147 (1962).
- [13] D. I. Olive, Exact Electromagnetic Duality (Talk given at Trieste Conference on Recent Developments in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. April 1995).
- [14] S. E. Hjeltnel and U. Lindström, Duality for the non-specialist, [hep-th/9705122].
- [15] J. A. Mignaco, Electromagnetic duality, charges, monopoles, topology, ..., Braz. J. Phys 31, 235 (2001).
- [16] M. S. Guimarães, D. C. Rodrigues, C. Wotzasek, J. L. Noronha, On duality of the noncommutative extension of the Maxwell-Chern-Simons model, Phys. Lett. B605, 419 (2005), [hep-th/0410156].
- [17] F. Quevedo Duality and global symmetries, Nucl. Phys. Proc. Suppl. 61A, 23 (1998), [hep-ph/9706210].
- [18] Tai Tsu Wu ;Chen Ning . YangPhysical Review D12, p. 3845
- [19] T.D. Lee e C.N. Yang, Phys. Rev. 104, 256 (1956)
- [20] C.S. Wu et al, Phys. Rev. 105, 1413 (1957)
- [21] An Introduction to the Standard Model of Particle Physics, Cambridge. W. N. Cottingham , D. A. Greenwood
- [22] Quarks & Leptons: An Introduction Course in Modern Particle Physics, Francis Halzen and Alan D. Martin, John Wiley & Sons.
- [23] Greiner W. and Müller B., Quantum Mechanics Symmetries, Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2nd edition, 1989,94 (Ch. 1 - 6, 9).
- [24] H.Weyl, Ann. Physik 59 (1919)
- [25] L. O’Raifeartaigh, The Dawning of Gauge Theory, Princeton University Press, 1997.

- [26] M. W. Ray, E. Ruokokoski, S. Kandel, M. Möttönen & D. S. Hall. Observation of Dirac monopoles in a synthetic magnetic field
- [27] C. N. Yang and R. L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.* 96 (1954), 191–195.
- [28] G. 't Hooft. 50 Years of Yang-Mills Theory. EUA, 1st edition, 200
- [29] Higgs, Peter (1966). "Spontaneous Symmetry Breakdown without Massless Bosons". *Physical Review* 145 (4)
- [30] C. N. Yang and R. L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, *Phys. Rev.* 96 (1954), 191–195.
- [31] [http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1999/thoof-lecture.pdf#search='thoof'](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1999/thoof-lecture.pdf#search='thoof')
- [32] Thierry Dauxois, Michel Peyrard. *Physics of Solitons*, Cambridge University, 2006
- [33] Tanmay Vachaspati. *Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons*
- [34] R. Rajaraman. *Solitons And Instantons: An Introduction To Solitons And Instantons In Quantum Field Theory*
- [35] G. Giacomelli., Search for GUT Magnetic Monopoles with the MACRO Experiment at the Gran Sasso Lab [<http://arxiv.org/abs/hep-ex/0210021>]
- [36] [www.inp.demokritos.gr/nesor/2nd/files/223\\_232\\_vincenzi.pdf](http://www.inp.demokritos.gr/nesor/2nd/files/223_232_vincenzi.pdf)
- [37] [inspirehep.net/record/450188/references](http://inspirehep.net/record/450188/references)
- [38] G. Giacomelli and L. Patrizii., Magnetic Monopole Search [arxiv.org/pdf/hep-ex/0302011v2.pdf]
- [39] W.V.R.Malkus, "The Interaction of the Dirac Magnetic Monopole with Matter"(1951)
- [40] Castelnovo, C., Moessner, R. & Sondhi, S. L. Magnetic monopoles in spin ice. *Nature* 451, 42–45 (2008)

- [41] Milton, K. A. Theoretical and experimental status of magnetic monopoles. *Rep. Prog. Phys.* 69, 1637–1711 (2006)
- [42] Nordstrom, G., On the possibility of unifying the electromagnetic and the gravitational fields, *Phys. Z.* 15, 504- 506 (1914)
- [43] E.Witten, *Nucl.Phys.* B135,412(1981)
- [44] M.B.Green e J.H.Schwars,*Phys. Lett.*109B,444(1982)
- [45] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S. and Dvali, G. R.,The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter,*Phys. Lett. B* 429, (1998), [hep-ph/9803315]
- [46] Randall, L. and Sundrum, R., An alternative to compactification, *Phys. Rev. Lett.* 83, (1999), [hep-th/9906064]
- [47] Alex A.S., Um Estudo sobre Dimensões Extras, UFCG (2009)
- [48] Polchinski, J., Dirichlet-branes and ramond-ramond charges, *Phys. Rev. Lett.* 75, (1995), [hep-th/9510017]
- [49] Polchinski, J., Lectures on d-branes, (1996), [hep-th/9611050]
- [50] Polchinski, J., *String Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics . Volume 1,2
- [51] Clifford V. Johnson., *D-Branes*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics
- [52] Wellington R.S.Freire., *Confinamento em Matéria Taquiônica*, UFCG (2011)
- [53] 't Hooft, G.: Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys. B* 79, 276–284 (1974)
- [54] [www.staff.science.uu.nl/~hooft101/gthpub.html](http://www.staff.science.uu.nl/~hooft101/gthpub.html)
- [55] Polyakov, A.M.: Particle spectrum in the quantum field theory. *JETP Lett.* 20, 194–195 (1974)
- [56] G. 'tHooft. Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-abelian gauge theories. *Nucl. Phys.* B190 (1981) 455 - 478.

- [57] G.'t Hooft in High Energy Physics, Proceedings of the EPS International Conference,Palermo,1975,Italy,edited by A.Zichichi
- [58] S.Mandelstam,Phys.Rep.23C,245 (1976)
- [59] V. Singh, D.A. Browne and R.W. Haymaker, Phys. Lett. B306, 115 (1993)[<http://arxiv.org/pdf/hep-lat/9301004.pdf>]
- [60] Polyakov, A.: Gauge Fields and Strings. Harwood Academic Publishers, Chur (1987) , pg 80
- [61] Mitsuyoshi Tomiya, Monopoles with compactified extra dimensions. J. Phys. G: Nucl. Phys. 14 (1988) L153-L158. Printed in the UK
- [62] D. Bazeia, F.A. Brito, W. Freire and R.F. Ribeiro.Confinement from new global defect structures [<http://arxiv.org/pdf/hep-th/0311160v2.pdf>]
- [63] J. M. Hoff da Silva, Roldão da Rocha. Effective Monopoles within Thick Branes[<http://arxiv.org/pdf/1209.0989v2.pdf>]